



برای سال سوم دبیرستان



توانا پوهنځي دانا پوه  
وزارت آموزش پرورش

توانا بود هر که دانا بود

وزارت آموزش و پرورش

جبر

برای سال سوم دبیرستانها

حق چاپ محفوظ

چاپ و توزیع از :



۱۳۵۲



این کتاب که به وسیله آقایان : حسین بحرانی ،  
محمدتقی زاوشی، دکتر محمد علی مجتهدی، دکتر هوشنگ  
منتصری نگارش یافته، بر طبق ماده ۳ قانون کتابهای درسی  
و اساتید سازمان کتابهای درسی ایران برای تدریس در  
دبیرستانها برگزیده شده است .

چاپ به طریق افست از چاپخانه سپهر

صفحه	عنوان
	فصل اول
۱	۱ - اتحادها
۲	۲ - تجزیه عبارات به حاصل ضرب عاملها
	فصل دوم
۹	کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت
	فصل سوم
۱۵	كسر
	فصل چهارم
۳۰	معادلات كسری
	فصل پنجم
۳۶	معادله يك مجهولی درجه اول حرفی
	فصل ششم
۴۰	نسبت و تناسب
	فصل هفتم
۴۸	دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول و حل آن
	فصل هشتم
۷۵	حل مسائل فکری
	فصل نهم
۸۵	مختصات نقطه و نمودارها
۹۰	تمرینات مختلف

$$ax(ab+4)-by(ab+4)-z(ab+4)= \\ (ab+4)(ax-by-z)$$

ج - تجزیه چند جمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از اتحادهای:  $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

مثال ۱:  $4x^2 + 4x + 1 = (2x+1)^2$

مثال ۲:  $4ay^2 - 4a^2y + 2a^2 = 2a(y^2 - 2ay + a^2) = 2a(y-a)^2$

د - تجزیه چند جمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از اتحاد:  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

مثال ۱:  $9 - x^2 = (3+x)(3-x)$

مثال ۲:  $a^2b^2 - 16 = (a^2b^2 + 4)(a^2b^2 - 4) = (a^2b^2 + 4)(ab+2)(ab-2)$

مثال ۳:  $(x+1)^2 - y^2 = (x+1+y)(x+1-y)$

مثال ۴:  $(2a+3)^2 - (a-4)^2 = (2a+3+a-4)(2a+3-a+4) = (3a-1)(a+7)$

ه - تجزیه چند جمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از اتحاد:  $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

مثال ۱: برای تجزیه عبارت  $x^2 + 4x + 3$  به حاصل ضرب عاملها، باید دو عدد بقسمی یافت که مجموع آنها ۴ و حاصل ضربشان ۳ باشد. این دو عدد ۳ و ۱ می‌باشند، پس:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

مثال ۲: برای تجزیه عبارت  $a^2 - 7a + 12$  به حاصل ضرب عاملها، باید دو عدد بقسمی یافت که مجموع آنها ۷- و حاصل ضربشان ۱۲+ باشد. این دو عدد ۴- و ۳- می‌باشند، پس:

$$a^2 - 7a + 12 = (a-4)(a-3)$$

مثال ۳:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۴:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۵:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۶:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۷:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۸:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۹:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

مثال ۱۰:  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3$$

۲- تجزیه عبارات به حاصل ضرب عاملها

الف - تجزیه چند جمله‌ای به حاصل ضرب عاملها وقتی

که جمله‌های آن، عامل مشترکی داشته باشند: در این حال، خارج قسمت چند جمله‌ای را بر عامل مشترک تعیین کرده و حاصل ضرب عامل مشترک در خارج قسمت را برابر چند جمله‌ای قرار می‌دهند.

مثال ۱:

$$8ax + 4ay - 12az + 4a^2 = 4a(2x + y - 3z + a)$$

مثال ۲:

$$3a^2b^2x - 6a^2b^2x^2 + 12ab^2x^3 = 3ab^2x(ab^2 - 2a^2x + 4x^2)$$

ب - تجزیه چند جمله‌ای به حاصل ضرب عاملها از راه

دسته‌بندی جمله‌ها.

مثال ۱:  $4a - 4b + ax - bx - ay + by =$

$$4(a-b) + x(a-b) - y(a-b) = (a-b)(4+x-y)$$

مثال ۲:  $a^2bx + 4ax - ab^2y - 4by - abz - 4z =$

$$\begin{aligned} & xy(x-y) - z(x+y)(x-y) + z^1(x-y) = \\ & (x-y)[xy - z(x+y) + z^1] = \\ & (x-y)(xy - xz - yz + z^1) = \\ & (x-y)[x(y-z) - z(y-z)] = \\ & (x-y)(y-z)(x-z) \end{aligned}$$

تمرین

حاصل عبارات زیر را بدست آورید :

$$\begin{aligned} -1 & -3x^2 + xy^1 + y^2 + (2x^2 - 5xy^1) - (-5x - 3x^1y + y^2) \\ -2 & 5a^2 - (11ab^1 + 12ac^1) - (7b^2 + 2ab^1 - 2ac^1) - (ac^1 + a^2) \\ -3 & (2a-b) - (3b-a) + (5c-b) - (-2c+b) + c-a \\ -4 & 7a-2b-[a-(2a-b)+(2b-c)] = (5a-b-c) \\ -5 & -(a^1x^1-5ax)+ax^1-(7ax+a^1x^1-11ax^1)-a^1x^1 \\ -6 & \frac{1}{8}x^1 - \frac{3}{4}ax + \frac{3}{11}x^1 + \frac{7}{4}ax - ax + x^2 \end{aligned}$$

ضریبهای زیر را انجام دهید :

$$\begin{aligned} -7 & -2a^1b(2ab+2b^1-2a) \\ -8 & (3x^1-4x+3)(x^1-1) \\ -9 & (a^1b+1)(a^1-1) \\ -10 & (\frac{1}{2}xy-x^1)(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y) \\ -11 & (2ax^1-5ax+a)(2ax+a) \\ -12 & (3x^1-5y^1+7x)(x-2y) \\ -13 & (3x^1-12x+4)(2x^1+1x-2) \end{aligned}$$

مثال ۳ :  
و - تجزیه چندجمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از اتحادهای :  $a^2 \pm b^2 = (a \pm b)(a \mp b)$   
مثال ۱ :  $x^2 + 8 = x^2 + 2^2 = (x+2)(x^1-2x+4)$   
مثال ۲ :  $1-y^2 = 1^2-y^2 = (1-y)(1+y+y^1)$   
ز - تجزیه چندجمله‌ای به حاصل ضرب عاملها با استفاده از عامل مشترك قرار دادن، دسته‌بندی کردن و اتحادها.

مثال ۱ : برای تجزیه عبارت  $a^2x^1-a^2-b^2x^1+b^2$  حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$\begin{aligned} a^2x^1-a^2-b^2x^1+b^2 &= a^2(x^1-1)-b^2(x^1-1) \\ &= (x^1-1)(a^2-b^2) \\ &= (x+1)(x-1)(a^1+b^1)(a^1-b^1) \\ &= (x+1)(x-1)(a^1+b^1)(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

مثال ۲ : برای تجزیه عبارت :

به حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$\begin{aligned} a^1x^1+2a^1x+a^1-b^1x^1-2b^1x-b^1 &= \\ a^1(x^1+2x+1)-b^1(x^1+2x+1) &= \\ a^1(x+1)^1-b^1(x+1)^1 &= \\ (x+1)^1(a^1-b^1) &= (x+1)^1(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

مثال ۳ : برای تجزیه عبارت :

به حاصل ضرب عاملها چنین عمل می‌کنیم :

$$\begin{aligned} x^1(y-z)+y^1(z-x)+z^1(x-y) &= \\ x^1(y-z)+y^1(z-x)+z^1(x-y) &= \\ x^1y-x^1z+y^1z-y^1x+z^1x-z^1y &= \\ xy(x-y)-z(x^1-y^1)+z^1(x-y) &= \end{aligned}$$

$$12a^2b^2 - 3a^2b^2 + 18ab^2 - 42a^2b \quad -37$$

$$5a^2(x+y) - 8b^2(x+y) - 12(x+y) \quad -38$$

$$12(a+b) - 8(a+b)^2 \quad -39$$

$$(a+b+c)^2 - a(a+b+c) - (a+b+c) \quad -40$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$a^2 + 2a^2 - 2a - 4 \quad -41$$

$$2ax + 2a - bx - 2b \quad -42$$

$$ac - ad + bc - bd \quad -43$$

$$6x^2 - 6mx^2 - 3m^2x + 3m^2 \quad -44$$

$$ax^2 + bx^2 + bx + ax + a + b \quad -45$$

$$x^2 - cx^2 + acx - ax^2 - bcx + bx^2 = abx + abc \quad -46$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$9a^2b^2 - 16c^2d^2 \quad -48 \quad 2x^2 - 25y^2 \quad -47$$

$$2a^2 - b^2 \quad -50 \quad \frac{1}{4}x^2y^2 \quad -49$$

$$(2m-1)^2 - (m-1)^2 \quad -51 \quad (2a+1)^2 - 9b^2 \quad -51$$

$$(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2 \quad -52$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 \quad -53$$

$$x^2 - y^2 + 2y - 2x^2 \quad -56 \quad a^2 - 6a + 9 - 2b^2 \quad -55$$

$$9a^2b^2 - 25x^2 + 10x - 1 \quad -57$$

$$X \quad a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 - c^2d^2 + 2cd^2 - d^2 \quad -58$$

$$9x^2 - 3xy + \frac{y^2}{4} - a^2 - a - \frac{1}{4} \quad -59$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{3}{4}xy + 9y^2 - \frac{a^2}{9} - \frac{ab}{3} - \frac{b^2}{4} \quad -60$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$a^2 - 2a + 1 \quad -62 \quad x^2 + 5x + 4 \quad -61$$

$$y^2 - 2y - 3 \quad -64 \quad b^2c^2 - 5bc + 6 \quad -63$$

$$y^2 - 2by - 15b^2 \quad -66 \quad x^2 - 2ax + 2a^2 \quad -65$$

$$-(a-b-c)(a-b+c)(a-b) \quad -14$$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

$$(2x-5)(x-2) - (2x+1)(2x+5) \quad -15$$

$$2x(x^2-a) + 2a(x-x^2) - (2x+a)(x^2-a) \quad -16$$

$$(x^2-2)(x^2+2) - (2x^2+5)(2-x^2) + 2x^2 - 5x^2 \quad -17$$

$$(x+2y-z)(x+2y+z) = (2y+z)(z-y) \quad -18$$

$$(ax^2-5ax)(2ax^2+7ax) + a^2x^2(x-a) - 2ax^2 \quad -19$$

$$-2(x^2-2xy+y^2)(x+y) = 2(x^2+y^2+2xy)(x-y) \quad -20$$

تقسیمهای زیر را بجا آورید:

$$(x^2-6x^2+5x+6) : (x-2) \quad -21$$

$$(x^2-x^2+x-1) : (x-1) \quad -22$$

$$(a^2+5a^2b^2-5a^2b^2-b^2) : (a^2-2ab-b^2) \quad -23$$

$$(a^2x^2+y^2) : (ax+y) \quad -24$$

$$(x^2-\frac{12}{5}x^2+x^2+\frac{4}{3}x-2) : (\frac{4}{3}x-2) \quad -25$$

حاصل عبارات زیر را بدست آورید:

$$(2x-7)^2 + (2x+5)^2 - (x+2)(x-2) \quad -26$$

$$(ab+2c)^2 - (2ab+c)^2 - (5+c)(5-c) \quad -27$$

$$(x+y-z)^2 + (2x-y)^2 - (y+z)^2 \quad -28$$

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 + 2(a+b)(a-b)^2 \quad -29$$

$$(x+2)^2(x-2)^2 - (x^2-5)(x^2-5) \quad -30$$

$$(1+2a-2b)^2 - (2b-2a-1)^2 \quad -31$$

$$(2x+y-a)^2 - (x-y+2a)^2 + (a-y)^2 \quad -32$$

$$(2a+x)^2 - (x-2a) + 2a^2 - x^2 \quad -33$$

$$(x^2-2xy)(x^2+2xy) - (2x^2-y^2)^2 \quad -34$$

$$(a^2+b^2-5)(a^2-b^2+5) - (2a^2-b^2+1)^2 \quad -35$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$2a^2b^2 - 5a^2b^2 + 2ab^2 - ab^2 \quad -36$$

$$a^2b^2 + 8abcd + 15c^2d^2 - 68 \quad z^2 - 9yz + 14y^2 - 67$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$a^2x^2 - b^2 - 70 \quad x^2 - y^2 - 69$$

$$(x+1)^2 + y^2 - 72 \quad m^2 + 8 - 71$$

$$16a^2 - 81 - 74 \quad b^2 - (c+d)^2 - 73$$

$$64a^2 - b^2 - 76 \quad m^2 - p^2 - 75$$

$$125 - (a+b)^2 - 77$$

عبارات زیر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کنید:

$$2a^2bc - 18ab^2c - 78$$

$$a^2bx - ab^2x - 79$$

$$x^2 - 2x^2 - 2x - 80$$

$$2ax^2y + 6ax^2y^2 + 2x^2y^2 + 1xy^2 - 81$$

$$5a^2x - 80b^2x - 82$$

$$a^2 - ab - b - 1 - 83$$

$$x^2 + x^2 - x^2 - x - 84$$

$$2x^2y^2 - (x^2 + y^2 - z^2)^2 - 85$$

$$a^2 + 2a^2 - a - 2 - 86$$

$$2a^2c^2x - 2a^2b^2x - 2d^2c^2x + 2b^2d^2x - 87$$

$$a^2b^2 - b^2 - 9a^2 + 9 - 88$$

$$a^2y^2 - 8a^2 - x^2y^2 + 8x^2 - 89 +$$

$$x^2 - 12x^2 + 26 - 90$$

$$a^2b^2 - 5a^2b^2 + 2 - 91 -$$

$$a^2x^2 - 2ax^2 + 2x^2 - a^2y^2 + 2ay^2 - 2y^2 - 92$$

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) - 93$$

$$a^2(c-d) + b^2(d-c) + c^2(a-b)$$

## فصل دوم

### کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت \*

حل معادلات به وسیله تجزیه

۱- مضرب مشترك چند عبارت جبری - مضرب مشترك چند

عبارت جبری عبارتی است که به هریک از آنها قابل قسمت باشد.

مثلا یکی از مضربهای مشترك دو عبارت جبری  $3ab$  و  $5b^2$  عبارت

$15ab^2$  است.

توجه کنید! اگر مضرب مشترك حاصل را در هر عبارت یا عدد

جبری دیگری ضرب کنید، مضرب مشترك دیگری برای دو عبارت

$3ab$  و  $5b^2$  بدست خواهید آورد؛ پس مضربهای مشترك دوبا چند

عبارت جبری بیشمارند.

۲- کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت جبری - بین

مضربهای مشترك چند عبارت، آن را که درجه اش کمتر و ضریب

عددی کوچکترین مضرب مشترك ضرایب عددی آن چند عبارت

باشد، کوچکترین مضرب مشترك آن چند عبارت گویند. مثلا

کوچکترین مضرب مشترك دو عبارت  $3ab$  و  $5b^2$ ، عبارت  $15ab^2$

است و کوچکترین مضرب مشترك دو عبارت  $2(a+1)$  و  $6(a+1)$ ،

\* از این قسمت، در برنامه اسمی برده نشده است ولی دانستن آن،

برای دانش آموزان در عملیات مربوط به کسرها مفید است.



عبارت  $(a+1) \times 6$  می باشد.

۳- برای تعیین کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت جبری چنین عمل می کنند:

الف - هر يك از عبارتها را به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه می کنند.  
ب - کوچکترین مضرب مشترك ضرایب عددی آنها را تعیین می کنند.

ج - بین عاملهای مشترك عبارتها، آنهایی را که نمای بیشتری دارند، انتخاب نموده در عاملهای غیر مشترك عبارتها و نیز در کوچکترین مضرب مشترك ضرایب عددی آنها ضرب می کنند.  
عبارتی که به این ترتیب بدست می آید کوچکترین مضرب مشترك عبارتهاست.

مثال ۱- کوچکترین مضرب مشترك عبارتهای  $3a^2$  و  $ab$  و  $2a$

و  $ac$  را تعیین کنید.

چون هر يك از عبارتها به صورت حاصل ضرب عاملهاست، ابتدا کوچکترین مضرب مشترك ضرایب عددی را که در این حالت ۶ است، بدست می آوریم. سپس بین عاملهای مشترك،  $a^2$  را اختیار می کنیم (عامل مشتركی که بزرگترین نامار دارد). حال  $6a^2$  را در همه عاملهای غیر مشترك که در این حالت  $b$  و  $c$  است، ضرب می کنیم؛ پس  $6a^2bc$  کوچکترین مضرب مشترك عبارتهای فوق خواهد بود.

مثال ۲- کوچکترین مضرب مشترك عبارتهای  $a+4$  و

$$16-a^2 \text{ و } (a+4)^2 \text{ را بدست آورید.}$$

عبارت  $16-a^2$  را به حاصل ضرب عاملها تبدیل می کنیم:

$$16-a^2 = (a+4)(4-a)$$

پس  $(a+4)^2$  عامل مشترك با بزرگترین نما و  $a-4$  عامل غیر- مشترك بوده و  $(a-4)^2(a+4)$  کوچکترین مضرب مشترك است.

مثال ۳- کوچکترین مضرب مشترك عبارتهای  $6x^2-3x$  و

$$1-5x \text{ و } 2x^2-10x \text{ چنین بدست می آید:}$$

ابتدا هر يك از عبارتها را تجزیه می کنیم:

$$6x^2-3x = 3x(2x-1)$$

$$2x^2-10x = (2x+1)(2x-1)$$

$$5-10x = -5(2x-1)$$

و از آنجا که کوچکترین مضرب مشترك چنین است:

$$-15x(2x+1)(2x-1)$$

۴- حل معادلات به وسیله تجزیه - می دانید که اگر دو عبارت

جبری  $A$  و  $B$  به ازای يك یا چند مقدار که به جای حروف آنها قرار دهیم بایکدیگر مساوی شوند،  $A=B$  را معادله می نامند و آن يك یا چند مقدار را ریشه یا ریشه های آن معادله می گویند.

مثلا عبارتهای  $x+1$  و  $2x-4$  به ازای  $x=5$  باهم برابرند؛

بنابراین  $x+1=2x-4$  معادله نام دارد و عدد ۵ ریشه آن است.

طریقه حل معادله درجه اول يك مجهولی را می دانید؛ با کمک

تجزیه بعضی از معادلات درجات بالاتر را می توان حل کرد.

-۱۲-

مثال ۱- معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  را حل کنید .

حل - می توان نوشت :  $(x-1)(x+2) = 0$  و این شرط  
موقعی برقرار است که داشته باشیم :  $x+2=0$  یا  $x-1=0$  زیرا  
وقتی که حاصل ضرب چند عامل مساوی صفر باشد ، لازم و کافی  
است که یکی از عاملهای ضرب صفر باشد .

از حل دو معادله آخر  $x = -2$  و  $x = 1$  بدست می آید، پس  
ریشه های معادله  $x^2 + x - 2 = 0$  اعداد ۱ و -۲ می باشند.

مثال ۲- معادله  $x^2 - 5x = 0$  را حل کنید .

حل - در طرف اول معادله ،  $x$  عامل مشترك است ، پس  
می توان نوشت :  $x(x-5) = 0$

در این صورت یا  $x = 0$  یا  $x - 5 = 0$  . اما جواب معادله  
آخر ،  $x = 5$  است ؛ پس ریشه های معادله  $x^2 - 5x = 0$  اعداد ۰ و  
۵ است .

مثال ۳- معادله  $x^2 - 4x = -3$  را حل کنید .

حل - عدد ۳- را به طرف اول معادله می بریم ، حاصل می-  
شود :  $x^2 - 4x + 3 = 0$  ، طرف اول را به حاصل ضرب عاملها  
تجزیه می کنیم :

$$(x-3)(x-1) = 0$$

اکنون می گوئیم : یا  $x - 3 = 0$  که در نتیجه  $x = 3$  .

یا  $x - 1 = 0$  که در نتیجه  $x = 1$  .

بنابراین ، جوابهای معادله  $x^2 - 4x = -3$  ، اعداد ۱ و ۳

می باشند .

-۱۳-

مثال ۴- معادله  $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$  را حل کنید .

حل - طرف اول معادله را به حاصل ضرب عاملها تجزیه

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x-2) - (x-2)$$

می کنیم :

$$= (x-2)(x^2-1)$$

$$= (x-2)(x-1)(x+1)$$

بنابراین ، معادله چنین نوشته می شود :

$$(x-2)(x-1)(x+1) = 0$$

که برای حل آن می گوئیم :

$$x - 2 = 0 \quad \text{یا} \quad x = 2 \quad \text{که از آنجا}$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x = 1 \quad \text{که از آنجا}$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad x = -1 \quad \text{که از آنجا}$$

پس ، ریشه های معادله بالا اعداد ۲ و ۱ و -۱ است .

تمرین

کوچکترین مضرب مشترك عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$۱۵b^2 \text{ و } ۱۸a^3b \text{ و } ۵a^2b^2 \text{ و } ۳ab \quad -۱$$

$$۱۶x^3 - ۱ \text{ و } ۴x + ۱ \text{ و } ۲x - ۱ \quad -۲$$

$$۱۵x^3 \text{ و } ۵(x-2)^2 \text{ و } x^2 - 2x \quad -۳$$

$$(x+5)^2 \text{ و } (x-5)^2 \text{ و } x^2 - 25 \quad -۴$$

$$(2a+1)^2 \text{ و } ۱۰ax + ۵x \text{ و } ۲ab + b \text{ و } ۸a + ۲ \quad -۵$$

$$۱۵x^3 - ۱۵x \text{ و } ۵x^2 - ۶x + ۹ \text{ و } x^3 - ۸۱ \quad -۶$$

$$x^3 - ۲x + ۲ \text{ و } x^3 - ۷x + ۱۰ \quad -۷$$

$$۱۵a - ۱۵ \text{ و } ۱۲a + ۹ \text{ و } ۲a^2 - ۹ \quad -۸$$

$$x^3 + ۵x + ۶ \text{ و } x^3 - ۱۵x - ۱۵ \text{ و } x^3 - ۲x - ۱۰ \quad -۹$$

$$۲xy + ۲x - ۵y - ۵ \text{ و } ۶xy - ۱۵y \text{ و } -۲y - ۲ \quad -۱۰$$

$$x^2 - 8 = x^2 - 4 \text{ و } 3x^2 + 6x + 12$$

$$a^2 - 81 \text{ و } a^2 + 18a + 81$$

معادلات زیر را حل کنید:

$$x^2 - 8x = 0$$

$$5x^2 - 4x^2 = 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

$$x(x+2) = -5x - 12$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x^2 - 7x^2 - 30x = 0$$

$$y^2 - 6y^2 = -5y$$

$$y^2 - 5y^2 + 4 = 0$$

$$x^2 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$z^2 - 10z^2 + 9 = 0$$

$$x^2 + \frac{31}{5}x^2 - x - \frac{31}{5} = 0$$

$$x^2 - 5x^2 - 4x^2 + 20x = 0$$

$$(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0$$

## فصل سوم

### کسر

۱- تعریف - دو عدد یا دو عبارت جبری A و B را در نظر

می گیریم . چنانچه خارج قسمت کامل تقسیم A بر B به شکل  $\frac{A}{B}$

نمایش داده شود ، آن را يك کسر جبری می نامند . A را صورت

و B را مخرج کسر می گویند . مانند:

$$\frac{-3}{5} \text{ و } \frac{a-b}{4d} \text{ و } \frac{-7}{a^2+5} \text{ و } \frac{x^2+y}{x+y} \text{ و } \dots$$

۲- همه خواصی که در حساب در باره کسر خوانده اید، در

مورد کسره های جبری نیز برقرار است .

خاصیت اصلی - اگر صورت و مخرج کسری را در يك عدد

یا عبارت جبری (مخالف صفر) ضرب و یا بر يك عدد یا عبارت

جبری (مخالف صفر) تقسیم کنیم ، مقدار کسر تغییر نخواهد کرد .

مثلاً اگر صورت و مخرج کسر  $\frac{a}{b}$  را در  $m (m \neq 0)$  ضرب

کنیم ، کسر  $\frac{m \cdot a}{m \cdot b}$  حاصل می شود که با کسر  $\frac{a}{b}$  برابر است و معمولاً

می گویند دو کسر  $\frac{a}{b}$  و  $\frac{m \cdot a}{m \cdot b}$  متعادلند .

و نیز چون صورت و مخرج کسر  $\frac{16}{17}$  بر ۴ قابل قسمت است، می توان صورت و مخرج آن را بر ۴ تقسیم کرد تا کسر  $\frac{4}{3}$ ، که معادل کسر اول است، بدست آید.

همچنین می توانیم صورت و مخرج کسر  $\frac{12a^2}{8ab}$  را بر ۴a تقسیم کنیم تا کسر  $\frac{3a}{2b}$ ، معادل آن، بدست آید.

۳- ساده کردن کسر - ساده ترین شکل هر کسر، کسری است معادل با آن که صورت و مخرجش عامل مشترک نداشته باشند.

برای ساده کردن کسر، قاعده آن است که صورت و مخرج کسر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کرده و آنها را بر عوامل مشترک تقسیم کنند.

مثال ۱ - برای ساده کردن کسر  $\frac{5a^2b^2}{15a^3b^2}$ ، چون صورت و مخرج به صورت حاصل ضرب عاملهاست، چنین عمل می کنیم: عامل مشترک صورت و مخرج را که  $5a^2b^2$  است، تعیین کرده آنها را بر این عامل مشترک تقسیم می کنیم:

$$\frac{5a^2b^2}{15a^3b^2} = \frac{b}{3a}$$

مثال ۲ - برای ساده کردن کسر  $\frac{x^2-4x}{x^2-16}$  چنین عمل می کنیم:

صورت و مخرج کسر را به حاصل ضرب عاملها تجزیه کرده سپس عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف می کنیم. (یعنی

صورت و مخرج آن را بر عامل مشترک تقسیم می کنیم):

$$\frac{x^2-4x}{x^2-16} = \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x}{x+4}$$

مثال ۳ - کسر  $\frac{a+b}{ax+bx+ay+by}$  را نیز چنین ساده می کنیم:

چون صورت این کسر عامل اول است، مخرج کسر را به حاصل ضرب عاملهای اول تجزیه کرده عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف می کنیم:

$$\frac{a+b}{ax+bx+ay+by} = \frac{a+b}{(a+b)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

۴- تحویل چند کسر به يك مخرج - مقصود از تحویل چند کسر به يك مخرج آن است که کسرهای دیگری مساوی این کسر ها با مخرجهای برابر بدست آورد.

برای این کار، می توان صورت و مخرج هر کسر را در حاصل ضرب مخرجهای کسرهای دیگر ضرب کرد.

مثال - برای آنکه کسرهای  $\frac{x}{y}$  و  $\frac{5}{b}$  را به يك مخرج

تحویل کنیم، صورت و مخرج هر یک از کسر ها را در حاصل ضرب مخرجهای کسرهای دیگر ضرب می کنیم:

$$\frac{x}{y} = \frac{x \times vb}{y \times vb} = \frac{14b}{a \times vb} = \frac{14b}{vab} \quad \text{و} \quad \frac{5}{b} = \frac{5 \times va}{b \times va} = \frac{5a}{vab} \quad \text{و} \quad \frac{x \times ab}{y \times ab} = \frac{abx}{vab}$$

۵ - تحویل چند کسر به کوچکترین مخرج مشترک - برای

تحويل چند كسر به كوچكترين مخرج مشترك، ابتدا هريك از كسرها را ساده نموده سپس كوچكترين مضرب مشترك مخرجها را تعيين مي كنند. و آن را كوچكترين مخرج مشترك كسرهاي مفروض قرار مي دهند. بعد براي لايين صورتها، مخرج مشترك را بر مخرج هر يك از كسرهاي مفروض تقسيم کرده خارج قسمت را در صورت همان كسر ضرب مي كنند، و حاصل ضرب را صورت كسر جديد قرار مي دهند.

مثال - براي تحويل كسرهاي  $\frac{a^2}{ax+a}$  و  $\frac{5}{x^2-1}$  و  $\frac{12a}{6x-6}$  به كوچكترين مخرج مشترك چنين عمل مي كنيم:

هريك از كسرها را ساده مي كنيم؛

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{ax+a} &= \frac{a^2}{a(x+1)} = \frac{a}{x+1} \\ \frac{5}{x^2-1} &= \frac{5}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{12a}{6x-6} &= \frac{12a}{6(x-1)} = \frac{2a}{x-1}\end{aligned}$$

كوچكترين مضرب مشترك مخرجها را كه  $(x-1)(x+1)$  است مخرج مشترك قرار مي دهيم؛

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} &= \frac{a}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{5}{(x+1)(x-1)} &= \frac{5}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{2a}{x-1} &= \frac{2a}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

براي تعيين صورتها، مخرج مشترك را بر مخرج هر كسر تقسيم و خارج قسمت را در صورت همان كسر ضرب مي كنيم و حاصل ضرب را صورت آن كسر قرار مي دهيم:

$$\begin{aligned}\frac{a}{x+1} &= \frac{a(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{5}{(x+1)(x-1)} &= \frac{5}{(x+1)(x-1)} \\ \frac{2a}{x-1} &= \frac{2a(x+1)}{(x+1)(x-1)}\end{aligned}$$

۶- جمع جبري كسرها - براي جمع كردن كسرها باهم، يا تفريق كردن آنها از هم، دو حالت تميز مي دهيم:

حالت اول - مخرجها مشتركند - در اين حالت مجموع كسري است كه مخرج آن يكي از مخرجها و صورت آن مجموع جبري صورتهاست.

مثال -  $\frac{1}{a+b} + \frac{a-2}{a+b} + \frac{3}{a+b} = \frac{1+a-2+3}{a+b} = \frac{a+2}{a+b}$

حالت دوم - مخرجها مشترك نيستند - در اين حال ابتدا كسرها را به كوچكترين مخرج مشترك تحويل كرده، سپس مانند حالت اول عمل مي كنند.

مثال ۱ - براي تعيين حاصل عبارت  $\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b}$  چون كوچكترين مضرب مشترك مخرجها  $(a+b)(a-b)$  است، چنين عمل مي كنيم:

$$\begin{aligned}\frac{a}{a-b} - \frac{a^2}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b} &= \\ \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{a^2}{(a-b)(a+b)} - \frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)} &= \\ \frac{a(a+b) - a^2 - b(a-b)}{(a-b)(a+b)} &= \\ \frac{a^2 + ab - a^2 - ab + b^2}{(a-b)(a+b)} &= \frac{b^2}{(a-b)(a+b)}\end{aligned}$$

$$\frac{a(a+b) - a^1 - b(a-b)}{(a-b)(a+b)} =$$

$$\frac{a^1 + ab - a^1 - ab + b^1}{(a-b)(a+b)} =$$

$$\frac{b^1}{(a-b)(a+b)}$$

مثال ۲ - حاصل عبارت زیر را تعیین کنید :

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x^2-3x+2} + \frac{2x+1}{x^2-2x+1}$$

ابتدا مخرج مشترك می گیریم. برای این کار، همانطور که می دانید، باید مخرجها را به صورت حاصل ضرب عوامل در آوریم:

$$3x-3 = 3(x-1)$$

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^2-2x+1 = (x-1)^2$$

کوچکترین مضرب مشترك مخرجها، یعنی کوچکترین مخرج

مشترك،  $3(x-1)^2(x-2)$  است، و می توانیم بنویسیم:

$$\frac{2}{3x-3} - \frac{5x}{x^2-3x+2} + \frac{2x+1}{x^2-2x+1} =$$

$$\frac{2}{3(x-1)} - \frac{5x}{(x-1)(x-2)} + \frac{2x+1}{(x-1)^2} =$$

$$\frac{2(x-1)(x-2) - 5x(x-1) + 3(x-2)(2x+1)}{3(x-1)^2(x-2)} =$$

$$\frac{-7x^2-2}{3(x-1)^2(x-2)}$$

۲- ضرب کسرها - حاصل ضرب دو یا چند کسر، کسری است

که صورتش حاصل ضرب صورتها، و مخرجش حاصل ضرب مخرجهای آن کسرها باشد.

مثلاً حاصل ضرب دو کسر  $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$  برابر  $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$  یا  $\frac{10}{21}$  است، زیرا

که مقصود از ضرب  $\frac{2}{3}$  در  $\frac{5}{7}$  بدست آوردن  $\frac{2}{3}$  از  $\frac{5}{7}$  است و می دانید که

برای این کار باید  $\frac{5}{7}$  را به  $\frac{10}{14}$  قسمت کنیم که می شود  $\frac{5}{3 \times 7}$  و قسمت

آنرا اختیار کنیم، که می شود  $\frac{2 \times 5}{3 \times 7}$ ؛

و چون در کسر جبری، اگر به جای حروف مقادیر عددی آنها

را قرار دهیم، کسر عددی حاصل می شود، قاعده بالا را برای ضرب

دو کسر جبری نیز بکار می آوریم.

$$\frac{rab}{\delta xy} \times \frac{2a}{x} = \frac{6a^1b}{\delta x^1y}$$

مثال ۱ -

$$\frac{2}{a^1b} \times \frac{-5}{rab} \times \frac{b^1}{\delta a^1} = \frac{-10b^1}{1\delta a^0b^1} = \frac{-2}{ra^1}$$

مثال ۲ -

مثال ۳ -

$$\frac{\delta x^2}{x^2-2x+2} \times \frac{2x-2}{1\delta x} = \frac{\delta x^2(2x-2)}{1\delta x(x^2-2x+2)} =$$

$$\frac{10x^1(x-2)}{1\delta x(x-2)^2} = \frac{2x}{3(x-2)}$$

توجه کنید - چون هر عبارت صحیح را می توان به صورت

کسری با مخرج يك نوشت، در ضرب عبارت صحیح در کسر، کافی است که آنرا در صورت کسر ضرب کنیم.

$$(x-2) \times \frac{2x+1}{x^2-2} = \frac{(x-2)(2x+1)}{x^2-2} =$$

مثال -

$$\frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\frac{2x+1}{x+2}$$

-۲۲-

۸ - تقسیم دو کسر - می‌دانید که در حساب، برای تقسیم دو کسر بر یکدیگر کسر مقسوم علیه را معکوس کرده در کسر مقسوم ضرب می‌کنند.

مثلاً خارج قسمت  $\frac{2}{5} \div \frac{4}{3}$  برابر  $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$  با  $\frac{8}{15}$  می‌باشد. زیرا می‌دانیم مقصود از تقسیم  $\frac{2}{5}$  بر  $\frac{4}{3}$  تعیین کسری است که چون در  $\frac{4}{3}$  ضرب شود، کسر  $\frac{2}{5}$  حاصل گردد و این کسر برابر است با:

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

چنانچه  $\frac{8}{15}$  را در  $\frac{4}{3}$  ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{8}{15} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{5}$$

چون در کسر جبری، چنانچه به جای حروف مقادیر عددی آنها را قرار دهیم، کسر عددی حاصل می‌شود، قاعده بالا را برای تقسیم دو کسر جبری نیز بکار می‌بریم.

مثلاً خارج قسمت  $\frac{3x}{2x-2} \div \frac{2x}{x-1}$  را چنین بدست می‌آوریم:

$$\frac{3x}{2x-2} \div \frac{2x}{x-1} = \frac{3x}{2x-2} \times \frac{x-1}{2x} = \frac{3x(x-1)}{2x(2x-2)} = \frac{3x(x-1)}{4x(x-1)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2x}{x-1} = \frac{6x}{4(x-1)} = \frac{3x}{2x-2}$$

امتحان:

-۲۳-

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} \div \frac{x+1}{x+2} = \frac{x^2-1}{x^2-4} \times \frac{x+2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+1)(x+1)} = \frac{x-1}{x-2}$$

مثال دیگر -

$$\frac{x-1}{x-2} \times \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-1}{x^2-4}$$

امتحان:

توجه کنید - اگر در تقسیم، مقسوم یا مقسوم علیه، عبارت صحیح باشد، آن را به شکل کسر، با مخرج یک، می‌نویسند و مطابق دستور بالا عمل تقسیم را انجام می‌دهند.

$$\frac{ax-\Delta a}{x} \div (x-\Delta) = \frac{ax-\Delta a}{x} \times \frac{x-\Delta}{1} =$$

مثال -

$$\frac{ax-\Delta a}{x} \times \frac{1}{x-\Delta} = \frac{ax-\Delta a}{x(x-\Delta)} = \frac{a(x-\Delta)}{x(x-\Delta)} = \frac{a}{x}$$

۹ - کسری که صورت و مخرج آن یا یکی از آنها شامل کسر

باشد، کسر مرکب نامیده می‌شود. مانند کسرهای مرکب زیر:

$$x + \frac{2}{a} \quad \frac{3x+1}{a+b} \quad \frac{\Delta a}{x + \frac{1}{x}}$$

۱۰ - تبدیل کسر مرکب به کسر ساده - برای ساده کردن

کسر مرکب حاصل صورت و مخرج آن را جداگانه تعیین می‌نمایند و سپس حاصل صورت را بر حاصل مخرج تقسیم می‌کنند.

مثال - کسر مرکب  $\frac{x-1}{x+\frac{1}{x}}$  به این ترتیب به کسر ساده تبدیل می‌شود:

$$\frac{(x-y)^{-1} - (p-q)^{-1}}{(x-p)^{-1} - (q-y)^{-1}} \text{ و } \frac{(a-b)x}{b^2 - a^2} \quad -۹$$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید:

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4} \quad -۱۰$$

$$\frac{1}{a^2bc} + \frac{1}{ab^2c} - \frac{1}{abc^2} \quad -۱۱$$

$$\frac{1}{2a} - \frac{2}{2x} + \frac{1}{x} \quad -۱۳ \quad \frac{2}{2x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{2x} \quad -۱۲$$

$$\frac{5}{a} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{abc} \quad -۱۵ \quad \frac{5}{2ac} - \frac{1}{2ab} - \frac{1}{bc} \quad -۱۴$$

$$1 + \frac{a-b}{a+b} \quad -۱۷ \quad 2x + \frac{2-2x}{5} \quad -۱۶$$

$$1 - x + x^2 - \frac{x^2}{1+x} \quad -۱۹ \quad a+b - \frac{a^2-b^2}{a+2b} \quad -۱۸$$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{2}{a+2} \quad -۲۱ \quad \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \quad -۲۰$$

$$\frac{a+x}{2} - \frac{5}{a-x} \quad -۲۳ \quad \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} \quad -۲۲$$

$$\frac{2}{2x-2} + \frac{1}{2x-2} \quad -۲۵ \quad \frac{1}{a-b} - \frac{a}{a^2-b^2} \quad -۲۴$$

$$\frac{a}{2+a} + \frac{a}{2-a} + \frac{2a^2}{4-a^2} \quad -۲۷ \quad \frac{2a}{a^2-16} - \frac{2}{a-2} \quad -۲۶$$

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{2x^2-1} = \frac{2}{1-2x} \quad -۲۸$$

$$x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} \text{ .... حاصل صورت}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \text{ .... حاصل منفرج}$$

$$\frac{x^2-1}{x} \div \frac{x^2+1}{x} \text{ .... حاصل کسر مرکب}$$

$$\frac{x^2-1}{x} \times \frac{x}{x^2+1} = \frac{x(x^2-1)}{x(x^2+1)} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

تمرین

کسرهای زیر را ساده کنید:

$$\frac{12a^2bc^2}{\lambda abc^2} \text{ و } \frac{-32xyz}{-6xyz^2} \text{ و } \frac{12x^2-2xy}{16x^2} \quad -۱$$

$$\frac{b+b^2}{a+ab} \text{ و } \frac{22a^2-20a^2m}{20am^2-20m^2} \text{ و } \frac{a-b}{b-a} \quad -۲$$

$$\frac{ax+x^2}{ab-bx} \text{ و } \frac{a^2-2a+1}{a-1} \text{ و } \frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma} \quad -۳$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} \text{ و } \frac{ac+bc+ad+bd}{a^2+ab} \quad -۴$$

$$\frac{25+5x+2y+xy}{5+y} \text{ و } \frac{xy-2x-2y+6}{xy-2x} \quad -۵$$

$$\frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \text{ و } \frac{(a+b)^2-c^2}{a^2-(b-c)^2} \quad -۶$$

$$\frac{9-m^2}{m^2-7m+12} \text{ و } \frac{x^2-a^2-2ab-b^2}{(x+a+b)^2} \quad -۷$$

$$\frac{x^2-9x^2}{x^2-x^2-6x^2} \text{ و } \frac{a+b+c}{c^2-(a+b)^2} \quad -۸$$



(۶)

$$\frac{x^r-1}{r} \times \frac{ra}{x+1}$$

-۴۱

$$\frac{a^r-b^r}{a} \times \frac{1}{a+b} \times \frac{a}{a-b}$$

-۴۲

$$\frac{x^r-y^r}{\lambda a^r} \times \frac{ra^r}{(x-y)^r}$$

-۴۳

$$\frac{a^r b^r + rab}{ra^r-1} \times \frac{ra+1}{ab+r}$$

-۴۴

$$\frac{x^r-1}{x^r+x} \times \frac{x^r-1}{x-r}$$

-۴۵

$$\frac{x^r-1}{x^r-r} \times \frac{x+r}{rx+r^2}$$

-۴۶

$$\frac{a^r-rb^r}{ax^r} \times \frac{a^r+rab}{(a-rb)^r} \times \frac{r \vee x^r(a-rb)}{a^r}$$

-۴۷

$$\frac{x^r-x-r}{p+q} \times \frac{p^r x-q^r x}{x^r-r} \times \frac{x+r}{(p-q)x^r}$$

-۴۸

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید :

$$(a^r-x+\frac{rx^r}{a^r+x})(a^r+x)=a^r+x^r+rx$$

-۴۹

$$(\frac{1}{x^r}-\frac{1}{x^r}+\frac{1}{x})(x^r+x^r)=x^r+1$$

-۵۰

$$(1+x+\frac{r+x^r}{1-x})(1-x)=r$$

-۵۱

$$(a^r-1)(\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-1)=a^r+1$$

-۵۲

$$(\frac{1}{1+x}+\frac{rx}{1-x^r})(\frac{1}{x}-1)=\frac{1}{x}$$

-۵۳

$$\frac{r}{x^r-x}+\frac{rx}{x-1}-\frac{rx^r-rx+r}{x(x-1)}=\frac{r}{x}$$

-۲۹

$$\frac{rx}{x+r}+\frac{rx}{x^r-r}-\frac{rx^r-r}{x^r-r}=\frac{r}{x-r}$$

-۳۰

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{rx}{1-x^r}=\frac{r}{1+x}$$

-۳۱

$$\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}-\frac{a^r+1}{a^r-1}=\frac{a^r+1}{a^r-1}$$

-۳۲

$$\frac{r \circ a}{a^r-1}+\frac{r}{ra-1}-\frac{r}{ra+1}-\frac{r}{ra-1}$$

-۳۳

-۳۴

$$\frac{a^r+ab+b^r}{a+b}-\frac{a^r-ab+b^r}{a-b}+\frac{rb^r-b^r+a^r}{a^r-b^r}=1$$

$$\frac{ra-rb}{a+b}-\frac{ra-rb}{a-b}-\frac{ra-rb}{a+b}+\frac{ra-rb}{a-b}=1$$

-۳۵

$$\frac{x+1}{rx-r}+\frac{x-1}{rx+r}-\frac{rx}{x^r-1}+\frac{x^r+1}{x^r-1}=\frac{x-1}{x+1}$$

-۳۶

$$\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}+\frac{ra^r}{a^r+b^r}+\frac{ra^r b^r}{a^r-b^r}=\frac{ra}{a-b}$$

-۳۷

-۳۸

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

حاصل عبارات زیر را تعیین کنید :

$$\frac{\Delta ac^r}{r!b^r} \times \frac{r!bc^r}{\lambda a^r} \times \frac{ra^r b^r}{r \circ c^r}$$

-۳۹

$$\frac{x^r}{x-y} \times \frac{x^r-y^r}{\lambda}$$

-۴۰

$$\left(\frac{a^2-x^2}{a+y}\right)\left(a+\frac{ax}{a-x}\right) \div \frac{ax+x^2}{a^2-y^2} = \frac{a^2(a-y)}{x} \quad -۶۷$$

$$\left(\frac{a+y}{x-y} \times \frac{2x^2-2y}{2a^2-1}\right) \div \frac{ax+2a}{y} = \frac{6}{a^2-2a} \quad -۶۸$$

کسره‌های مرکب زیر را به ساده‌ترین صورت خود تبدیل کنید:

$$\frac{1+\frac{2}{x-1}}{\frac{3}{2x-2}-5} \quad -۶۹$$

$$\frac{\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+2}}{1-\frac{x^2}{x^2-16}} \quad -۷۰$$

$$\frac{\frac{2x}{x-2y}-\frac{2x}{x+2y}}{1-\frac{2y^2-10xy}{2y^2-x^2}} \quad -۷۱$$

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\left(1-\frac{1}{1+x}\right)} \quad -۷۲$$

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}} \quad -۷۳$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{2}{2x}+\frac{x}{2}-x\right)=2 \quad -۵۴$$

$$\left(\frac{a+b}{2a-2b}-\frac{a-b}{2a+2b}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right) \times \frac{(a-b)^2}{2b} = a-b \quad -۵۵$$

خارج قسمت تقسیمهای زیر را تعیین کنید:

$$\frac{6x^2y}{5ab^2} \div \frac{18xy}{25a^2b^2} \quad -۵۶$$

$$\frac{5a^2b}{7xy^2} \div \frac{15a^2b}{24xy^2} \quad -۵۷$$

$$\frac{x+y}{2} \div \frac{x^2-y^2}{6} \quad -۵۸$$

$$\frac{2x}{2x-2} \div \frac{2x}{x-1} \quad -۵۹$$

$$\frac{x+1}{a^2-1} \div \frac{2x+2}{a-1} \quad -۶۰$$

$$\frac{2x^2}{a^2+x^2} \div \frac{x}{a^2-ax+x^2} \quad -۶۱$$

$$\frac{x^2-a^2}{(x-a)^2} \div \frac{x^2+ax}{x-a} \quad -۶۲$$

$$\frac{x^2-x-2}{a^2-b^2} \div \frac{x-2}{a^2+ab} \quad -۶۳$$

درستی برابریهای زیر را تحقیق کنید:

$$\left(1-\frac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\frac{a+b}{a-b}-1\right) = \frac{a-b}{a+b} \quad -۶۴$$

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) \div \left(x^2+\frac{1}{x}\right) = x^2-\frac{1}{x} \quad -۶۵$$

$$\left(\frac{2x}{y} \times \frac{2x^2-2y^2}{5}\right) \div \frac{x^2-xy}{10} = \frac{12(x+y)}{y} \quad -۶۶$$

حال طرف اول را به يك كسر تبديل می كنیم (مخرج مشترك می گیریم) ؟

$$\frac{x+1}{x-1} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2+x-1}{x-1} = 0$$

اکنون، چون کسر طرف اول ساده تر از این نمی شود، صورت

$$x+1=0$$

آن را مساوی صفر قرار می دهیم ؟

$$x=-1$$

و بالاخره معادله را حل می کنیم ؟

جواب معادله مفروض  $x=-1$  است .

مثال ۲ - معادله  $\frac{x}{x-3} = \frac{x+1}{x-2}$  را حل کنید .

حل - بترتیب چنین عمل می کنیم :

$$\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x-2} = 0$$

$$\frac{x(x-2)-(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2-2x-x^2+2x+3}{(x-3)(x-2)} = 0$$

یا

$$\frac{-2x+3}{(x-3)(x-2)} = 0$$

یا

$$-2x+3=0$$

پس

$$x=\frac{3}{2}$$

و از آنجا

جواب معادله مفروض  $x=\frac{3}{2}$  است .

## فصل چهارم

### معادلات کسری

۱- معادلات کسری - جمله‌ها معادله شامل کسر، و مجهول معادله در مخرج کسر باشد، آن را معادله کسری می گویند .

مانند معادلات :  $\frac{1}{x-1} + 2x = \frac{2}{x}$  و  $\frac{2}{x+1} = 5$

۲- حل معادله کسری - برای حل معادله کسری به طریق

زیر عمل می کنند :

الف - کسرهای موجود در دو طرف معادله را ، در صورت امکان، ساده می کنند .

ب - تمام جمله‌ها را به يك طرف معادله می برند .

ج - بین تمام جمله‌ها كوچكترین مخرج مشترك می گیرند و آنها را به يك كسر تبديل و كسر حاصل را به ساده ترین صورت خود تحويل می کنند .

د - چون کسری مساوی صفر است كه صورت آن صفر باشد، صورت كسر حاصل را مساوی صفر قرار می دهند .

ه - معادله ای را كه بدین طریق بدست می آید، حل می کنند .

مثال ۱ - معادله  $\frac{2}{x-1} = -1$  را حل کنید .

حل - ابتدا عدد ۱ - را به طرف اول معادله می بریم ؟

$$\frac{2}{x-1} + 1 = 0$$

مثال ۳- معادله  $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2x-4}{x^2-4} = 0$  را حل کنید.

حل -  $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x}{x+2} - \frac{x^2+2x-4}{(x-2)(x+2)} = 0$

$$\frac{(x-1)(x+2) + x(x-2) - (x^2+2x-4)}{(x-2)(x+2)} = 0$$

یا  $\frac{x^2-2x+2}{(x-2)(x+2)} = 0$

این کسر را ساده می کنیم :  $\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = 0$

یا  $\frac{x-1}{x+2} = 0$

پس  $x-1=0$

و از آنجا  $x=1$

جواب معادله مفروض  $x=1$  است.

مثال ۴- معادله  $\frac{1-\frac{5}{x+2}}{x} = 2$  را حل کنید.

حل - ابتدا کسر مرکب طرف اول معادله را به ساده ترین صورت خود در می آوریم :

$$1 - \frac{5}{x+2} = \frac{x+2-5}{x+2} = \frac{x-3}{x+2}$$

$$\frac{x-3}{x+2} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{(x-3)(x+2)}{x(x+2)} \cdot \frac{x-3}{x}$$

پس معادله را می توان چنین نوشت :

و آن را چنین حل کرد :

یا  $\frac{-x-3}{x} = 0$

پس  $-x-3=0$

و از آنجا  $x=-3$

جواب معادله مفروض  $x=-3$  است.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

$$\frac{3x-16}{x} = \frac{5}{3}$$

-۱

$$\frac{5x-5}{x+1} = 3$$

-۲

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{3x} - \frac{6}{5x} = \frac{52}{15}$$

-۳

$$\frac{3x-7}{4x+2} = \frac{3x-14}{4x-12}$$

-۴

$$\frac{7x+16}{21} - \frac{x+8}{4x+10} = \frac{23}{7} + \frac{x}{3}$$

-۵

$$x - \frac{x^2-5x}{x-7} = \frac{2}{3}$$

-۶

$$\frac{3}{3-x} + \frac{4}{3+x} = \frac{8x+2}{9-x^2}$$

-۷

-20-

$$\frac{rx^2 - \Delta}{rx - \rho} - \frac{y}{\rho x + 12} = x + y + \frac{y}{rx^2 - \Delta}$$

$$\frac{r - rx}{r} + \frac{x}{\rho} - \frac{\rho x^2 - 1}{1\Delta - 2\rho x} = \frac{r - x}{9}$$

$$\frac{r}{x-1} + \frac{r}{x+1} - \frac{\Delta}{rx - y} = \frac{11}{rx + r} + \frac{r}{1 - x^2}$$

$$\frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \frac{r}{\Delta}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{r}{\Delta}$$

$$\frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{x-y} = \frac{r}{y}$$

$$\frac{1}{x-y} + \frac{r}{x+y}$$

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{\Delta}{\rho}$$

$$1 + \frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{\frac{1}{rx - y} - \frac{1}{rx}}{\frac{1}{x} - y} = \frac{1}{1 - \rho x^2}$$

$$\frac{r + rx - \Delta + rx}{1 + rx - y - rx} = \frac{1\rho}{9}$$

$$\frac{rx^2 - y}{1 - \frac{y}{y + 12x - rx^2}}$$

$$1 - \frac{1}{\frac{1}{x} + 1}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1}$$

-22

-22

-22

-20

-22

-22

-22

-22

-20

-22-

$$\frac{rx + 1}{rx - 1} - \frac{10}{rx^2 - 1} - \frac{rx - 1}{rx + 1}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{r}{x+y}$$

$$\frac{\Delta}{x-y} - \frac{r}{rx+y} - \frac{rx-1}{x^2-y}$$

$$\frac{x+y}{x-1} - \frac{x+r}{1-x} + \frac{x-\Delta}{rx-y} = 0$$

$$\frac{\Delta}{rx - \rho} - \frac{x+1}{x^2 - \rho x + 9} = \frac{1}{rx - 9}$$

$$\frac{x+1}{x+y} - \frac{x+y}{x+y} = \frac{x+\Delta}{x+\rho} - \frac{x+\rho}{x+y}$$

$$\frac{1}{x+y} - \frac{r}{(x-y)^2} = \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{r}{x+y} = \frac{\Delta}{x-\Delta}$$

$$\frac{r}{x} - \frac{\Delta x + \Delta}{x^2 - 1}$$

$$\frac{x^2 - \rho x + \Delta}{x^2 - 1} - \frac{r}{r} = 0$$

$$\frac{rx - \rho}{x^2 - \rho x + 9} - \frac{\rho x + r}{rx^2 - 1} = 0$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x-1} - \frac{rx - \frac{x^2 + x + 1}{x+1}}{x+1}$$

$$\frac{x-r}{rx+\rho} - \frac{x^2+\rho}{\rho(x^2-9)} = \frac{x+r}{rx-9}$$

$$\frac{x+1}{rx-r} - \frac{x^2+y}{rx^2-9} = \frac{r}{rx+r} - \frac{x-1}{\rho-rx}$$

-22

-22

-20

-22

-22

-22

-22

-20

-22

-22

-22

-22

-20

-21

هیچ مقداری نمی توان یافت که چون در صفر ضرب شود ، حاصل برابر عددی مخالف صفر گردد .

به عبارت دیگر عددی وجود ندارد که اگر به جای  $x$  در این معادله قرار دهیم دو طرف معادله برابر گردد. در چنین صورت معادله را نشدنی (ممتنع) می گویند .

و اگر  $b=0$  باشد ، معادله به شکل  $0 \times x = 0$  درمی آید . و هر عددی به جای  $x$  بگذاریم ، چون در صفر ضرب شود حاصل برابر صفر می گردد .

به عبارت دیگر هر عدد دلخواهی جواب این معادله است. در چنین صورت معادله را مجهول می گویند .

مثال ۱- معادله  $x(a-b)=1-(b-1)x$  را حل و بحث کنید .

$$\text{حل و بحث: } ax-bx=1-bx+x$$

$$\text{یا } ax-x=1$$

$$\text{یا } x(a-1)=1$$

اولاً- اگر  $a \neq 1$  باشد ، طرفین معادله را بر  $a-1$

تقسیم می کنیم و  $x = \frac{1}{a-1}$  ، جواب معادله است .

ثانیاً- اگر  $a=1$  باشد ، معادله به شکل  $0 \times x = 0$  در می آید که نشدنی است و جواب ندارد .

مثال ۲- معادله  $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a-b$  را حل و بحث کنید .

## فصل پنجم

### سادة يك مجهولى درجه اول، حرفى

۱- تعریف - اگر در معادله يك مجهولى ، غير از حرف مجهول ، حرف دیگری موجود باشد ، معادله را حرفى می گویند .  
مانند معادله  $bx + ax = 1$  که در آن ،  $x$  مجهول و  $a$  و  $b$  معلومند .

۲- حل و بحث معادله يك مجهولى درجه اول حرفى -  
هر معادله يك مجهولى درجه اول را ، پس از نقل جمل مجهول به يك طرف و جمل معلوم به طرف دیگر معادله وساده نمودن آنها ، به صورت کلی  $ax=b$  می توان نوشت .

برای حل چنین معادله ای دو حالت در نظر می گیرند :

حالت اول -  $a \neq 0$  . در این حال طرفین معادله را بر  $a$  تقسیم می کنند تا  $\frac{b}{a} = x$  جواب معادله بدست آید .

حالت دوم -  $a = 0$  . در این حال :

اگر  $b \neq 0$  باشد ، معادله به شکل  $0 \times x = b$  درمی آید ، و

$$a - \frac{m+n}{x} = b - \frac{m-n}{x}$$

$$\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$$

$$\frac{a(x-a)}{b} + \frac{b(x+b)}{a} + x = 0$$

$$\frac{a(x-a)}{b} + \frac{b(x-b)}{a} = x$$

$$\frac{rx+a}{b} - \frac{x-b}{a} = \frac{rax+(a-b)^2}{ab}$$

$$\frac{1+ax}{1-ax} = \frac{r+a^2x^2}{1-a^2x^2}$$

$$\frac{x+a}{a-b} - \frac{x+b}{a+b} = \frac{rx-rb}{a-b} - \frac{x-a}{a+b}$$

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$$

$$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x+a-b}$$

$$\frac{x+1}{1-x} = \frac{a+b+1}{a+b-1}$$

$$\frac{x+1}{x+a+b} = \frac{x-1}{x+a-b}$$

$$\frac{x+a+b}{a} - \frac{x+b-a}{b} = \frac{b^2-a^2}{ab}$$

$$\frac{x-1}{x+a-b} = \frac{1-x}{x-a+b} + r$$

$$\frac{x+a+b}{x+a} = \frac{x+a+b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

حل و بحث :

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a + b = 0$$

$$\frac{bx-ax}{ab} = \frac{a^2b+ab^2}{ab} = 0$$

$$bx-ax-a^2b+ab^2=0$$

$$x(b-a) = -ab(b-a)$$

اولاً - اگر  $b=a$  باشد ، طرفین را بر  $b-a$ تقسیم می کنیم و  $a=b$  حاصل می شود .ثانیاً - اگر  $b \neq a$  باشد ، معادله به شکل  $0 \times x = 0$  در

می آید که مبهم است و جوابهای بی شمار دارد .

تمرین

معادلات حرفی زیر را حل و بحث کنید :

$$a(x-u) - b(a-x) - (a+b)x$$

$$(x+a)(x-b) = x^2$$

$$ab(x+1) = a^2+b^2x$$

$$(x-1)(x-2) = (x-a)^2$$

$$\frac{x+a}{a} - \frac{x+b}{b} = 1$$

$$\frac{a}{b-x} - \frac{b}{a-x}$$

$$\frac{x}{mn} - \frac{x-m}{m} = \frac{m-n}{n}$$

۱

۹۵

۱۰

۱۱

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

۱۸

۱۹

۲۰

۲۱

۱

۲

۳

۴

۵

۶

۷

نموده یا بر عددی (مخالف صفر) تقسیم کنیم ، مقدار نسبت تغییری

نخواهد کرد .

۳- اگر چند نسبت متساوی باشند ، نسبتی که صورت آن مجموع صورتها و مخرج آن مجموع مخرجهای آن چند نسبت باشد ، با هر يك از آنها برابر است .

$$\left[ \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{A+B+C}{A'+B'+C'} \right] \quad \text{یعنی :}$$

$$\frac{C}{C'} = q \text{ و } \frac{B}{B'} = q \text{ و } \frac{A}{A'} = q \quad \text{زیرا که اگر فرض کنیم}$$

(چون نسبتها با یکدیگر مساویند) ، بنابه تعریف تقسیم نتیجه می شود :

$$C = C' \cdot q \quad \text{و} \quad B = B' \cdot q \quad \text{و} \quad A = A' \cdot q$$

حال اگر طرفین این سه تساوی را با یکدیگر جمع کنیم :

$$A+B+C = A'q + B'q + C'q$$

$$A+B+C = (A'+B'+C')q \quad \text{یا}$$

که از تقسیم طرفین این تساوی بر  $A'+B'+C'$  ، حاصل می شود :

$$\frac{A+B+C}{A'+B'+C'} = q$$

$$\frac{A+B+C}{A'+B'+C'} = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \quad \text{یعنی :}$$

تبصره - به همین طریق ثابت می شود که :

$$\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} - \frac{C}{C'} = \frac{A+B-C}{A'+B'-C'} = \frac{A-B-C}{A'-B'-C'}$$

مثال - ثابت کنید که هر يك از نسبتهای  $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$  ، با

$$\text{نسبت } \frac{2A+7B-5C}{2A'+7B'-5C'} \text{ مساوی است .}$$

## فصل ششم

### نسبت و تناسب

۱- تعریف - خارج قسمت کامل دو عدد یا دو عبارت جبری

A و B را بر یکدیگر نسبت آن دو عدد یا دو عبارت می نامند و به

شکل  $\frac{A}{B}$  یا A : B نمایش می دهند .

به A و B دو جزء نسبت می گویند و اگر آن را به صورت کسر

$\frac{A}{B}$  بنویسند ، A را صورت و B را مخرج می نامند .

مثلاً نسبت ۳ را بر ۷ به شکل  $\frac{3}{7}$  و نسبت  $\frac{8}{11}$  به شکل  $\frac{8}{11}$

و نسبت  $\frac{3}{5}$  را بر  $\frac{7}{13}$  به شکل  $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{13}}$  و نسبت  $2a-b$  را بر x به شکل

$\frac{2a-b}{x}$  نمایش می دهند .

۲- چون نسبت دو عدد یا دو عبارت را به شکل کسر نمایش

می دهند ، خواص کسرها ، درباره نسبتهای نیز محقق است .

مثلاً هرگاه دو جزء نسبت را در عددی (مخالف صفر) ضرب



اثبات - صورت و مخرج نسبت  $\frac{A}{\lambda}$  را در عدد ۴، و صورت و مخرج نسبت  $\frac{B}{B'}$  را در عدد ۷، و صورت و مخرج نسبت  $\frac{C}{C'}$  را در عدد ۵ - ضرب می کنیم (شماره ۲)، بنابراین داریم:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{4A}{4A'} = \frac{7B}{7B'} = \frac{5C}{5C'}$$

و بنا به شماره (۳) می توان نوشت:

$$\frac{4A}{4A'} = \frac{7B}{7B'} = \frac{5C}{5C'} = \frac{4A+7B+5C}{4A'+7B'+5C'} = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

۴- تعریف - هرگاه نسبت  $\frac{A}{B}$  برابر نسبت  $\frac{C}{D}$  باشد، تساوی

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

و B و C و D را چهار جزء تناسب می نامند.

به A و D طرفین، و به B و C وسطین تناسب می گویند.

(زیرا که وقتی تناسب را به شکل  $A:B=C:D$ ، در یک خط

بنویسیم A و D در دو طرف خط و B و C در وسط قرار دارند).

۵- خاصیت اصلی تناسب - در هر تناسب حاصل ضرب طرفین برابر است با حاصل ضرب وسطین.

زیرا که در تناسب  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ، اگر دو طرف تساوی را در B.D ضرب

نماییم، بدست می آید:

$$\frac{A}{B} \times B.D = \frac{C}{D} \times B.D$$

که پس از اختصار می شود.

$$\boxed{A.D=B.C}$$

۶- هرگاه بین چهار عبارت جبری A و B و C و D رابطه  $A.D=B.C$  برقرار باشد، همواره می توان چهار عبارت مزبور را اجزای تناسبی دانست که در آن A و D طرفین (یا وسطین) و B و C وسطین (یا طرفین) آن تناسب باشند.

زیرا که اگر طرفین تساوی  $A.D=B.C$  را بر B.D تقسیم

$$\frac{A.D}{B.D} = \frac{B.C}{B.D}$$

کنیم حاصل می شود:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

که پس از اختصار داریم.

۷- تعیین چهارمین جزء تناسب - هرگاه یکی از چهار جزء

تناسب مجهول باشد، با استفاده از خاصیت اصلی تناسب می توان

آن را تعیین کرد.

مثال ۱- برای تعیین x در تناسب  $\frac{2}{3} = \frac{4}{x}$ ، از خاصیت اصلی

تناسب استفاده کرده می نویسیم:

$$2x = -12$$

و از آنجا:

$$x = \frac{-12}{2} = -6$$

مثال ۲- برای تعیین چهارمین جزء تناسب زیر:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{9}{a^2-1}$$

چنانچه جزء مجهول را به x نشان دهیم، داریم:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{x}{a^2-1}$$

و بنا به خاصیت اصلی در تناسب :

$$x(a+1) = a(a+1)$$

حال از این رابطه  $x$  را به ترتیب زیر می توانیم بدست آوریم :

$$x = \frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} \quad \text{یا} \quad x = \frac{a(a^2-1)}{a+1}$$

و از آنجا با فرض  $a \neq -1$  :  $x = a(a-1)$

۸- با داشتن تناسب  $\left| \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \right|$  (۱) تناسبهای دیگری را

می توان نتیجه گرفت که بعضی از صورتهای مهم آنها بدین قرار است :

$$\text{الف - } \left| \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \right| \quad (۲)$$

یعنی در هر تناسب، از معکوس نمودن نسبتها، تناسب دیگری حاصل می شود .

زیرا که بنا به خاصیت اصلی (شماره ۵) از هر دو تناسب رابطه  $A.D = B.C$  برقرار است .

$$\text{ب - } \left| \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \right| \quad (۳) \quad \text{و} \quad \left| \frac{D}{B} = \frac{C}{A} \right| \quad (۴)$$

یعنی در هر تناسب از تغییر دادن جای طرفین با یکدیگر ، یا جای وسطین با یکدیگر ، تناسب دیگری حاصل می شود .

زیرا که بنا به خاصیت اصلی ، از تناسب (۱) رابطه  $A.D = B.C$  برقرار است . و از هر یک از تناسبهای (۳) و (۴) نیز همین رابطه برقرار است .

$$\text{ج - } \left| \frac{A+B}{B} = \frac{C+D}{D} \right| \quad (۵)$$

می گویند در تناسب (۱) ترکیب نسبت در صورت انجام گرفته است .

زیرا که اگر رابطه (۵) برقرار باشد ، بنا به خاصیت اصلی

در تناسب می توان نوشت :

$$A.D + B.D = B.C + B.D$$

که پس از ساده کردن حاصل می شود :

$$A.D = B.C$$

و این همان رابطه ای است که از تناسب (۱) نیز بدست می آید .

$$\text{د - } \left| \frac{A-B}{B} = \frac{C-D}{D} \right| \quad (۶)$$

می گویند در تناسب (۱) تفضیل نسبت در صورت بعمل آمده است .

$$\text{ه - } \left| \frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D} \right| \quad (۷)$$

می گویند در تناسب (۱) ترکیب نسبت در صورت و تفضیل نسبت در مخرج انجام گرفته است .

درستی تناسبهای (۶) و (۷) را ، با همان روشی که درباره

اثبات درستی تناسب (۵) بکار بردیم ، سهولت می توان تحقیق کرد .

۹- واسطه هندسی - اگر در تناسب  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  ، طرفین یا

وسطین مساوی باشند ، مثلاً  $A=D$  باشد ، می توان نوشت :

-۴۶-

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{A}$$

و بنابه خاصیت اصلی تناسب، رابطه  $A^2 = B \cdot C$  برقرار است و می‌گویند،  $A$  واسطه هندسی بین  $B$  و  $C$  است.

به همین طریق اگر  $B$  و  $C$  باشد (وسطین مساوی باشند)، نتیجه می‌شود  $B^2 = A \cdot D$ . در این حال  $B$  واسطه هندسی بین  $A$  و  $D$  است.

بنابراین: واسطه هندسی بین دو عدد، عددی است که مجذور آن برابر حاصل ضرب آن دو عدد باشد.

مثلاً  $4 = \pm$  واسطه هندسی بین دو عدد  $8$  و  $2$  است زیرا مجذور آن برابر حاصل ضرب  $8 \times 2$  می‌باشد. با دانستن  $8$  و  $2$  واسطه هندسی بین آنها چنین بدست می‌آید:

$$\pm \sqrt{2 \times 8} = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

### تمرین

۱- ثابت کنید که اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  باشد، هر یک از نسبتهای مزبور

با نسبتهای زیر برابرند:

$$\frac{2a - 3b + 4c}{2a' - 3b' + 4c'} \quad ; \quad \frac{a - b - 5c}{a' - b' - 5c'} \quad ; \quad \frac{3a + 7b}{3a' + 7b'}$$

۲- ثابت کنید که اگر  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  و  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  باشد این

تساوی محقق است:

-۴۷-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}$$

۳- از تناسب  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، تناسبهای زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{2a + b}{b} = \frac{2c + d}{d} \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ; \quad \frac{a + 2b}{a + 2b} = \frac{c + 2d}{c + 2d} \quad ; \quad \frac{a^2 + 2b^2}{c^2 + 2d^2} = \frac{a^2 + 2b^2}{c^2 + 2d^2}$$

۴- چهارمین جزء هر یک از تناسبهای زیر را تعیین کنید:

$$\frac{-11}{7} = \frac{9}{21} \quad ; \quad \frac{a+2}{5} = \frac{a^2-2}{9} \quad ; \quad \frac{a+1}{8} = \frac{a^2+1}{9}$$

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{9}{x+3} \quad ; \quad \frac{2}{mx+2x} = \frac{5m-10}{m^2-4}$$

۵- واسطه هندسی  $A$  و  $B$  را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید:

$$\begin{cases} A = -5 \\ B = -45 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2a^2b \\ B = -12b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = a^2 + 2a + 2 \\ B = a^2 - 6a + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5a^2 - 5 \\ B = 20ax^2 - 20x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{a^2-2}{8} \\ B = \frac{a-2}{2a+2} \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 5a + 6} \\ B = \frac{a^2 + a - 2}{a^2 + 2a - 3} \end{cases}$$

یکی از مجهولها، عدد دلخواه قرار دهیم تا معادله يك مجهولی حاصل شود و از حل آن مجهول دیگر را تعیین کنیم.

مثلا در معادله  $x + y = 12$ ، که بعضی از جوابهای آن را قبلا دیدید، چنانچه به جای  $x$  عدد دلخواهی مانند ۲ - قرار دهیم. معادله يك مجهولی  $12 = y + 2$  حاصل می شود که از حل آن بدست می آید  $y = 10$  بنابراین مقادیر  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$  یکی دیگر از جوابهای معادله  $x + y = 12$  است. بطور کلی هر معادله دو مجهولی جوابهای بیشمار دارد.

۳- دستگاه معادلات را اگر دو یا چند معادله، دارای جوابهای مشترکی باشند. می گویند آن معادلات تشکیل يك دستگاه معادلات را داده اند و جوابهای مزبور را جوابهای آن دستگاه می نامند. معمولاً سمت چپ معادلات يك دستگاه، آکولادی قرار می دهند مثلا دستگاه  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$  يك دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول است که جواب آن  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$  می باشد. زیرا که این اعداد در هر دو معادله دستگاه صادق می کند.

۴- دستگاههای متعادل - دو یا چند دستگاه را متعادل می گویند وقتی که جوابهای هر يك از آنها در دستگاه دیگر نیز صادق بکنند و بعکس. مانند دو دستگاه متعادل

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} 2x = 3y \\ x + y = 5 \end{cases}$$

## فصل هفتم

### دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول و حل آن

۱- معادله دو مجهولی درجه اول - اگر در معادله ای پس از نقل جمله ها به يك طرف و ساده کردن آن، دو حرف مجهول با نمای يك یافت شوند، معادله را دو مجهولی درجه اول می نامند. مانند معادله  $3x - 2y + 5 = 0$ ، یا معادله  $x + 31 - 1 = 0$ .

۲- ریشه معادله دو مجهولی درجه اول - معادله دو مجهولی درجه اول  $x + y = 12$  را در نظر می گیریم. مشاهده می شود که چون در آن معادله به جای  $x$  عدد ۱ و به جای  $y$  عدد ۱۱ قرار گیرد، دو طرف معادله مساوی می شود. همچنین هر دو مقدار:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = 17 \end{cases} \quad \text{و} \quad \dots\dots\dots$$

در معادله صادق می کند. بنابراین معادله مزبور جوابهای بیشمار دارد. برای تعیین جوابهای يك معادله دو مجهولی کافی است که به جای

که  $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$  جواب مشترک آنها می باشد.

هـ حل يك دستگاه معادلات - مقصود از حل يك دستگاه معادلات، تعیین ریشه ها یا جوابهای آن است. به عبارت دیگر مقصود از حل يك دستگاه معادلات، یافتن اعدادی است که چون به جای مجهولها، در معادلات دستگاه قرار گیرند، آنها را به تساویهای عددی تبدیل نمایند.

۶- حل دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول - هر دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول را به طریقهای زیر می توان حل کرد: **طریقه اول** - فرض می کنیم که بخواهیم دستگاه دو معادله

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 4y = -2 \end{cases} \text{ را حل کنیم.}$$

از هر دو معادله دستگاه  $x$  را بر حسب  $y$  تعیین می کنیم (یا  $y$  را بر حسب  $x$ ). از معادله اول دستگاه حاصل می شود:

$$3x = 2y + 8$$

$$(۱) \quad x = \frac{2y+8}{3} \quad \text{یا}$$

و از معادله دوم دستگاه حاصل می شود:

$$(۲) \quad x = -4y - 2$$

حال می گوئیم که چون طرف اول معادلات (۱) و (۲) به ازای جواب دستگاه متساویند، باید طرف دوم آنها نیز متساوی باشند، یعنی:

$$\frac{2y+8}{3} = -4y-2 \quad \text{یا} \quad \frac{2y+8+12y+6}{3} = 0$$

$$14y + 14 = 0 \quad \text{یا}$$

$$y = -1 \quad \text{و از آنجا}$$

اکنون اگر مقداری را که برای  $y$  بدست آورده ایم در معادله (۱) یا معادله (۲) (یا هر يك از معادلات دستگاه) قرار دهیم، يك معادله يك مجهولی پدید می آید که از حل آن مقدار  $x$  معلوم می شود. مثلاً معادله (۱)، با قرار دادن  $-1$ ، به جای  $y$  می شود:

$$x = \frac{-2+8}{3}$$

$$\boxed{x=2} \quad \text{و از آنجا}$$

بنابراین  $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$  جواب دستگاه است.

از آنچه گفته شد طریقه اول حل هر دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول به شرح زیر است (برای سهولت بیان مجهولات دستگاه را  $x$  و  $y$  نامیده ایم).

الف - از هر دو معادله دستگاه  $x$  را بر حسب  $y$  پیدای می کنند. بدین ترتیب دو معادله حاصل می شود که طرف اول آنها  $x$  است. ب - طرف دوم معادلات مزبور را مساوی قرار می دهند. بدین ترتیب يك معادله يك مجهولی بر حسب  $y$  حاصل می شود که آن را حل می کنند و مقدار  $y$  را بدست می آورند.

ج - مقدار  $y$  را در یکی از معادلاتی که  $x$  را بر حسب  $y$  معین کرده (یا در یکی از معادلات دستگاه) قرار می دهند و مقدار  $x$  را بدست می آورند.

-۵۲-

این راه حل را **طریقه حذف قیاسی** می گویند .

همانطور که اشاره شد ممکن است به جای آنکه  $x$  را بر حسب

$y$  از معادلات دستگاه تعیین کنند،  $y$  را بر حسب  $x$  تعیین کرده دستگاه را طبق روش حذف قیاسی حل کنند .

**مثال -** دستگاه دوم معادله دو مجهولی را حل کنید.  $\begin{cases} y = x + 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$

**حل -** از معادله اول دستگاه مقدار  $y$  بر حسب  $x$  چنین است:

$$y = x + 1 \quad *$$

از معادله دوم دستگاه نیز  $y$  را بر حسب  $x$  تعیین می کنیم :

$$x = 2y - 1$$

$$2y = x + 1 \quad \text{یا}$$

$$y = \frac{x+1}{2} \quad * \quad \text{و از آنجا}$$

$$x + 1 = \frac{x+1}{2} \quad \text{بنابراین}$$

$$\frac{2x+2-x-1}{2} = 0 \quad \text{یا}$$

$$x+1=0 \quad \text{یا}$$

$$x = -1 \quad \text{و از آنجا}$$

مقدار  $x$  را در معادله  $y = x + 1$  قرار می دهیم :

$$y = -1 + 1$$

$$y = 0 \quad \text{یا}$$

بنابراین  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$  جواب دستگاه می باشد .

-۵۳-

**طریقه دوم -** فرض می کنیم **مقدار**  $x$  را در معادله اول دستگاه  $\begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

باشد . از یکی از دو معادله، **مثلاً** از معادله دوم،  $x$  را بر حسب  $y$  پیدا می کنیم :

$$x + 2y = 2$$

$$x = 2 - 2y$$

و به جای  $x$  مساوی آن، یعنی  $2 - 2y$ ، را در معادله دیگر دستگاه،

یعنی  $2x - 2y = 8$ ، قرار می دهیم تا یک معادله یک مجهولی بر حسب

$$y \text{ پدید آید : } 2(2 - 2y) - 2y = 8$$

از حل این معادله مقدار  $y$  را بدست می آوریم :

$$4 - 4y - 2y = 8$$

$$-6y = 4 \quad \text{یا}$$

$$y = -\frac{2}{3} \quad \text{و از آنجا}$$

حال مقدار  $y$  را در معادله  $x = 2 - 2y$  قرار می دهیم ،

$$x = 2 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{یا}$$

بنابراین  $\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$  جواب این دستگاه است .

از آنچه گفته شد **طریقه دوم** حل دستگاه دو معادله دو مجهولی

به شرح زیر است (برای سهولت بیان مجهولات دستگاه را  $x$  و  $y$  نامیده ایم) .

**الف -** از یکی از دو معادله دستگاه  $x$  را بر حسب  $y$  تعیین

می کنند .

ب - در معادله دیگر دستگاه به جای  $x$  مقداری را که بر حسب  $y$  یافته اند قرار داده معادله يك مجهولی حاصل را حل می کنند تا مقدار  $y$  بدست آید .

ج - مقدار  $y$  را در معادله ای که  $x$  را بر حسب  $y$  معین کرده (یا یکی از معادلات دستگاه) قرار داده، مقدار  $x$  را محاسبه می کنند .

این راه حل را طریقه حذف تبدیلی گویند .

ممکن است به جای آنکه  $x$  را بر حسب  $y$  تعیین کنند ،  $y$  را بر حسب  $x$  تعیین و طبق روش حذف تبدیلی عمل کنند .

مثال - دستگاه  $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$  را به قاعده حذف تبدیلی حل کنید .

حل - از معادله دوم دستگاه ،  $y$  را بر حسب  $x$  پیدا می کنیم :

$$y = 4x - 3$$

مقدار  $y$  را در معادله دیگر دستگاه یعنی  $2x + 3y = 2$  قرار

$$2x + 3(4x - 3) = 2$$

$$2x + 12x - 9 = 2$$

$$14x = 11$$

$$x = \frac{11}{14}$$

و از آنجا

حال مقدار  $x$  را در معادله  $2x - 5 = 3y$  قرار می دهیم ، حاصل

$$y = 4\left(\frac{11}{14}\right) - 5$$

می شود :

$$y = \frac{1}{2}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} x = \frac{11}{14} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ بنابراین جواب این دستگاه است .}$$

طریقه سوم - فرض می کنیم مقصود حل دستگاه  $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$

باشد . در هر دو معادله دستگاه ضریب  $x$  ها (یا ضریب  $y$  ها) را قرینه یکدیگر می کنیم . مثلاً برای آنکه ضریب  $x$  ها قرینه شوند ، کافی است طرفین معادله دوم دستگاه را در عدد ۳ - ضرب کنیم . بدین ترتیب

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -3x + 12y = -6 \end{cases} \text{ دستگاه حاصل می شود که با دستگاه فوق متعادل است .}$$

حال طرفین دو معادله را با یکدیگر جمع جبری می کنیم تا جمله های قرینه  $3x$  و  $-3x$  حذف شده معادله ای يك مجهولی بر حسب

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ -3x + 12y &= -6 \\ \hline -2y + 12y &= 14 \end{aligned}$$

$y$  حاصل شود :

اکنون این معادله يك مجهولی را حل می کنیم :

$$-14y = 14$$

$$y = -1$$

و مقدار  $y$  را در یکی از معادلات دستگاه، مثلاً در معادله  $3x - 2y = 8$

قرار داده مقدار  $x$  را تعیین می‌کنیم:  $3x + 2 = 8$

$$3x = 6$$

یا

$$x = 2$$

و از آنجا

بنابراین  $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$  جواب دستگاه است.

از آنچه گفته شد طریقه سوم حل دستگاه دو معادله دو مجهولی

به شرح زیر است (برای سهولت بیان مجهولات دستگاه را  $x$  و  $y$

نامیده‌ایم).

الف - با ضرب طرفین معادلات دستگاه در عددی مناسب،

ضریب  $x$  ها را قرینه می‌کنند.

ب - طرفین دو معادله دستگاه حاصل را بایکدیگر جمع

می‌کنند تا جمله‌هایی که حرف  $x$  دارد حذف و معادله‌ای یک

مجهولی بر حسب  $y$  حاصل شود. از حل این معادله مقدار  $y$

را بدست می‌آورند.

ج - مقدار  $y$  را در یکی از معادلات دستگاه قرار داده مقدار

$x$  را بدست می‌آورند.

این راه حل را طریقه حذف تحویلی می‌گویند.

ممکن است به جای آنکه ضریب  $x$  ها را قرینه کنند، ضریب

$y$  ها را قرینه و طبق روش حذف تحویلی عمل کنند.

مثال ۱- دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$  را به طریقه حذف تحویلی حل کنید.

حل - برای حذف مجهول  $x$  ابتدا طرفین معادله اول دستگاه

را در عدد ۲ و طرفین معادله دوم دستگاه را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 48 \\ -6x + 15y = 21 \end{cases}$$

حال طرفین این دو معادله را بایکدیگر جمع جبری می‌کنیم:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 48 \\ -6x + 15y = 21 \end{cases}$$

$$15y + 8y = 21 + 48$$

و این معادله را حل می‌کنیم:  $23y = 69$   $\frac{23y}{23} = \frac{69}{23}$

$$y = 3$$

از آنجا

اکنون مقدار  $y$  را در معادله  $3x + 4y = 24$  قرار می‌دهیم و

معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$3x + 12 = 24$$

یا

$$3x = 12$$

از آنجا

$$x = 4$$

بنابراین  $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$  جواب دستگاه است.

مثال ۲- دستگاه دو معادله دو مجهولی  $\begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ 2x + y = \frac{3}{2} \end{cases}$  را به

قاعده حذف تحویلی حل کنید.

حل - برای حذف مجهول  $y$ ، چون ضریب  $y$  ها در دو معادله



قرینه هستند ، کافی است که طرفین دو معادله دستگاه را با یکدیگر جمع کنیم :

$$\begin{cases} x - y = \frac{3}{4} \\ 2x + y = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \quad \begin{array}{l} x - y = \frac{3}{4} \\ 2x + y = \frac{3}{4} \\ \hline -x - 2y = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$-x - 2y = \frac{3}{2}$$

حال این معادله را حل می کنیم :  $\boxed{x = 1}$

اکنون به جای  $x$  مقدارش را در معادله  $2x + y = \frac{3}{4}$  قرار می-

$$2 + y = \frac{3}{4} \quad \text{دهیم حاصل می شود :}$$

$$y = -\frac{1}{4}$$

و از آنجا

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{بنابراین جواب دستگاه است .}$$

#### ۷- بحث در جوابهای دستگاه دو معادله دومجهولی درجه اول-

هر معادله دومجهولی درجه اول را پس از انتقال جمله‌های مجهول به يك طرف معادله و جمله‌های معلوم به طرف دیگر ، و ساده کردن آنها ، به صورت کلی  $ax + by = c$  می‌توان نوشت ، بنابراین هر دستگاه دو معادله دومجهولی درجه اول را به صورت کلی  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  می‌توان نمایش داد . این دستگاه را به یکی از طریقه‌های بالا مثلا به طریقه حذف تحویلی حل می‌کنیم . برای این منظور طرفین معادله اول دستگاه را در  $b'$  و طرفین معادله دوم دستگاه را در  $b$  ضرب می‌کنیم :

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -ba'x - bb'y = -bc' \end{cases}$$

از جمع طرفین این دو معادله ، رابطه زیر حاصل می‌شود :

$$ab'x - ba'x = cb' - bc'$$

$$(1) \quad (ab' - ba')x = cb' - bc' \quad \text{یا}$$

بر حسب آنکه ضریب  $x$  مخالف صفر یا مساوی صفر باشد ، دو حالت تشخیص می‌دهند :

**حالت اول**  $ab' - ba' \neq 0$  . در این صورت طرفین معادله (۱)

را بر  $ab' - ba'$  تقسیم می‌کنند و  $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$  حاصل می‌شود .

حال اگر به جای  $x$  مقدارش را در یکی از معادلات دستگاه قرار دهند پس از انجام عملیات لازم  $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$  بدست می‌آید . بنابراین جواب دستگاه چنین است :

$$\boxed{x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}} \quad \text{و} \quad \boxed{y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}}$$

تساویهای فوق را **دستورهای کرامر** نامیده و به وسیله آنها می‌توان جواب هر دستگاه دو معادله دومجهولی درجه اول را تعیین کرد .

**مثال -** دستگاه  $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x + 4y - 21 = 0 \end{cases}$  را به وسیله دستورهای کرامر حل کنید .

**حل -** ابتدا مقادیر معلوم معادلات دستگاه را به طرف دایم انتقال

می‌دهیم . دستگاه مزبور به صورت  $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 4y = 21 \end{cases}$  در می‌آید که به همان

شکل کلی،  $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$  می باشد. از مقایسه معادلات این دستگاهها با هم نتیجه می گیریم که  $a=2$  و  $a'=-1$ ،  $b=-3$  و  $b'=4$  و  $c=-21$  و  $c'=21$  و حال اگر در دستورهای کرامر این مقادیر را به جای حروف قرار دهیم، جواب دستگاه بدست می آید:

$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ $= \frac{(-3)(21) - (-1)(21)}{(2)(4) - (-1)(1)}$ $= \frac{-12 + 21}{8 + 1}$ $= \frac{9}{9}$ $= 1$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin: 0 auto;">x=1</div>	$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ $= \frac{(2)(21) - (-3)(1)}{(2)(4) - (-1)(1)}$ $= \frac{42 + 3}{8 + 1}$ $= \frac{45}{9}$ $= 5$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: fit-content; margin: 0 auto;">y=5</div>
---	--

بنابراین جواب دستگاه چنین است:  $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$

**حالت دوم**  $ab' - ba' = 0$ . در این حال ممکن است که طرف دوم معادله (۱) یعنی  $cb' - bc' = 0$  نیز مساوی صفر یا مخالف صفر باشد: اولاً - اگر داشته باشیم  $cb' - bc' \neq 0$ ، معادله (۱) به صورت  $cb' - bc' = 0 \times x$  در می آید که جواب ندارد. می گویند دستگاه نشدنی یا ممتنع است. در این حال، چون رابطه  $ab' - ba' = 0$  را می توان به شکل  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  و نیز رابطه  $cb' - bc' \neq 0$  را به شکل  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  نوشت، و از مقایسه این نسبتها بدست آورد که  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

می توان گفت: هرگاه بین ضرایب مجهولها و مقادیر معلوم معادلات یک دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول روابط  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  برقرار باشد، دستگاه نشدنی است.

مثلاً دستگاه  $\begin{cases} x+y=5 \\ x+y=-9 \end{cases}$  که در آن  $\frac{a}{a'} = \frac{1}{1} = 1$  و  $\frac{b}{b'} = \frac{1}{1} = 1$  و  $\frac{c}{c'} = \frac{5}{-9} \neq 1$ ، روابط  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$  برقرار است و بنابراین دستگاه نشدنی است.

ثانیاً - اگر  $cb' - bc' = 0$  باشد، معادله (۱) به صورت  $0 \times x = 0$  در می آید که جوابهای بیشمار دارد. در این حال دستگاه را مبهم یا متماثل می گویند.

چون رابطه های  $ab' - ba' = 0$  و  $cb' - bc' = 0$  را به صورت های  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  و  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  می توان نوشت و از مقایسه آنها بدست می آید  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  و می توان گفت:

هرگاه بین ضرایب مجهول و مقادیر معلوم معادلات یک دستگاه دو معادله دو مجهولی درجه اول روابط:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

برقرار باشد، دستگاه مبهم است.

مثلاً در دستگاه  $\begin{cases} x-y=7 \\ 2x-2y=14 \end{cases}$  که در آن  $\frac{a}{a'} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{b}{b'} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{c}{c'} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ ، روابط  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$  برقرار

است ، بنابراین دستگاه مبهم است .

۸- باید دانست که اگر دستگاهی شامل ۳ یا چند معادله دو مجهولی باشد ، دستگاه فقط وقتی دارای جواب است که جواب حاصل از حل دو معادله دو مجهولی آن در سایر معادلات دستگاه نیز صدق کند . مثلا دستگاه ۳ معادله دو مجهولی زیر :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

که جواب دومعادله اول آن ،  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$  ، در معادله سوم نیز صدق می کند دارای جواب است . و جواب آن همان  $x=2$  و  $y=1$  است . ولی دستگاه ۳ معادله دو مجهولی زیر :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x+2y=13 \\ x-y=2 \end{cases}$$

که جواب دومعادله دوم و سوم آن ،  $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$  ، در معادله دیگر دستگاه صدق نمی کند دارای جواب نیست .

۹- حل چند مسئله نمونه

مسئله ۱- دستگاه دومعادله دو مجهولی زیر را حل کنید .

$$\begin{cases} \frac{x+1}{4} + \frac{y-2}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{2x+y-1}{x+2y} = -\frac{5}{7} \end{cases}$$

حل- ابتدا هریک از معادلات دستگاه را ساده می کنیم :

$$\frac{x+1}{4} + \frac{y-2}{3} = \frac{1}{4} \quad \text{معادله اول} :$$

$$\frac{x+1}{4} + \frac{y-2}{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3x+3+y-2}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3x+y-1}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3x+y-1=3 \Rightarrow 3x+y=4$$

که پس از ساده شدن به صورت  $3x+y=4$  درمی آید .

$$\frac{3x+y-1}{x+2y} = -\frac{5}{7} \quad \text{معادله دوم} :$$

$$\frac{3x+y-1}{x+2y} + \frac{5}{7} = 0 \Rightarrow \frac{3x+y-1+5x+10y}{7(x+2y)} = 0 \Rightarrow \frac{8x+11y-1}{7(x+2y)} = 0 \Rightarrow 8x+11y-1=0 \Rightarrow 8x+11y=1$$

که پس از ساده شدن به صورت  $8x+11y=1$  درمی آید .

اکنون ، دستگاه  $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 8x+11y=1 \end{cases}$  را به وسیله دستورهای کرامر حل می کنیم :

$$x = \frac{eb' - be'}{ab' - ba'} \quad y = \frac{ao' - ca'}{ab' - ba'}$$

$$= \frac{(11)(1) - (4)(8)}{(3)(11) - (4)(8)} \quad y = \frac{(3)(1) - (4)(8)}{(3)(11) - (4)(8)}$$

$$x = -3$$

$$y = 5$$

مسئله ۲- دستگاه دومعادله دو مجهولی زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} \frac{2}{x+y-1} + \frac{1}{x-y+2} = \frac{9}{17} \\ \frac{5}{x+y-1} - \frac{1}{x-y+2} = \frac{7}{17} \end{cases}$$

-۶۴-

حل - طرفین معادله اول دستگاه را در ۳ ضرب و طرفین معادله حاصل را با طرفین معادله دوم دستگاه جمع می کنیم تا کسرهایی که مخرج آنها  $x - y + ۲$  است حذف شوند . به این ترتیب :

$$\begin{cases} \frac{۶}{x+y-۱} + \frac{۳}{x-y+۲} = \frac{۲۷}{۴} \\ \frac{۵}{x+y-۱} - \frac{۶}{x-y+۲} = \frac{۱۷}{۴} \end{cases}$$

$$\frac{۶}{x+y-۱} + \frac{۵}{x+y-۱} = \frac{۲۷}{۴} + \frac{۱۷}{۴}$$

$$\frac{۱۱}{x+y-۱} = ۱۱$$

یا

$$x+y-۱=۱$$

یا

$$(۱) \quad x+y=۲$$

و از آنجا

بار دیگر ، طرفین معادله اول دستگاه را در ۵ و طرفین معادله دوم دستگاه را در ۲ ضرب و طرفین معادله های حاصل را با یکدیگر جمع می کنیم تا کسرهایی که مخرج آنها  $x+y-۱$  است حذف شوند . بدین ترتیب :

$$\begin{cases} \frac{۱۰}{x+y-۱} + \frac{۵}{x-y+۲} = \frac{۴۵}{۴} \\ \frac{-۱۰}{x+y-۱} + \frac{۶}{x-y+۲} = \frac{-۱۷}{۴} \end{cases}$$

$$\frac{۵}{x-y+۲} + \frac{۶}{x-y+۲} = \frac{۴۵}{۴} - \frac{۱۷}{۴}$$

$$\frac{۱۱}{x-y+۲} = \frac{۱۱}{۴}$$

یا

-۶۵-

$$x-y+۲=۲$$

یا

$$(۲) \quad x-y=۰$$

و از آنجا

دستگاهی که از معادلات (۱) و (۲) تشکیل گردد با دستگاه مفروض متعادل است . این دستگاه را تشکیل می دهیم و آن را به یکی از طریق های گذشته مثلا حذف تحویلی ، حل می کنیم :

$$\begin{cases} (۱) \quad x+y=۲ \\ (۲) \quad x-y=۰ \end{cases}$$

$$۲x=۲$$

$$x=۱$$

اکنون در معادله  $x-y=۰$  به جای  $x$  ، مقدارش را قرار

$$۱-y=۰$$

می دهیم ، حاصل می شود :

$$y=۱$$

مسئله ۳- دستگاه زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} ۲x+my=۳ \\ x+y=۳m \end{cases}$$

حل و بحث -  $x$  را از معادله دوم بر حسب  $y$  بدست می آوریم :

$$x=۳m-y$$

حال آن را در معادله اول دستگاه قرار می دهیم و خلاصه

می کنیم :

$$۲(۳m-y)+my=۳$$

$$my-۲y=۳-۶m$$

-۶۶-

$$(m-2)y = 3 - 6m$$

اولاً - به شرط  $m \neq 2$  ، طرفین معادله بالا را بر  $m-2$

تقسیم می کنیم ، حاصل می شود :

$$y = \frac{3-6m}{m-2}$$

که چون این مقدار را به جای  $y$  در معادله  $x = 3m - y$  قرار

دهیم ، بدست می آید :

$$x = \frac{3m^2 - 3}{m-2}$$

بنابراین به شرط  $m \neq 2$  ، جواب دستگاه عبارت است از :

$$\begin{cases} x = \frac{3m^2 - 3}{m-2} \\ y = \frac{3-6m}{m-2} \end{cases}$$

ثانیاً - به شرط  $m-2=0$  یا  $m=2$  ، معادله  $(m-2)y = 3-6m$

به صورت  $0 \times y = -9$  در می آید که نشدنی است .

مسئله ۴ - دستگاه زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} (a-b)x + (a+b)y = a^2 + b^2 \\ x + y = a + b \end{cases}$$

حل و بحث - از معادله دوم حاصل می شود :

$$y = a + b - x$$

به جای  $y$  ، مقدارش را ، در معادله اول دستگاه قرار می دهیم :

$$(a-b)x + (a+b)(a+b-x) = a^2 + b^2$$

که پس از اختصار می شود :

$$2bx = 2ab$$

-۶۷-

اولاً - به شرط  $b \neq 0$  ، طرفین معادله را بر  $b$  تقسیم می کنیم ،

نتیجه می شود :

$$x = a$$

که چون در معادله  $x = a + b - y$  قرار دهیم ، بدست می آید :

$$y = b$$

پس جواب دستگاه به شرط  $b \neq 0$  چنین است :

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

ثانیاً - به شرط  $b=0$  ، معادله  $bx = 2ab$  به صورت  $0 \times x = 0$

در می آید که مبهم است .

مسئله ۵ - در دستگاه  $m$  را طوری تعیین کنید که دستگاه

نشدنی باشد .

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

حل - برای آنکه دستگاه نشدنی باشد باید :

$$\frac{a}{a} = \frac{b}{b} \neq \frac{c}{c}$$

باشد ، ولی در این دستگاه  $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$  ، یعنی  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$  است .

پس کافی است داشته باشیم ، یعنی :

$$\frac{1}{3} = \frac{m}{-2}$$

$$m = \frac{-2}{3}$$

و از آنجا

مسئله ۶ - برای اقسامی تعیین کنید که دستگاه  $m$  مبهم

گردد.

$$\begin{cases} (n-2)x + by = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

حل - برای آنکه این دستگاه مبهم باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{یعنی:}$$

$$\frac{n-2}{1} = \frac{b}{3} = \frac{2}{2}$$

$$\frac{n-2}{1} = 2 \quad \text{که می توان نوشت:}$$

$$\frac{b}{3} = 2$$

و

$$b = 6 \quad \text{و} \quad a = 2$$

و از آنجا

تمرین

دستگاههای زیر را به طریقه حذف قیاسی حل کنید:

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x = 2y - 5 \end{cases} \quad -1$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2y - x = 8 \end{cases} \quad -2$$

$$\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 20y - 5x - 4 = 0 \end{cases} \quad -3$$

دستگاههای زیر را به طریقه حذف تبدیلی حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases} \quad -4$$

$$\begin{cases} 11x + 9y = -19 \\ 5x + 2y + 8 = 0 \end{cases} \quad -5$$

$$\begin{cases} 2x + 7y + 1 = 0 \\ 5x + 8y - 7 = 0 \end{cases} \quad -10$$

دستگاههای زیر را به طریقه حذف تحویلی حل کنید:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \quad -11$$

$$\begin{cases} 4y - 3x = 9 \\ 2x + 7y = -6 \end{cases} \quad -12$$

$$\begin{cases} 7x + 8y = 19 \\ 5x + 6y = 13/5 \end{cases} \quad -13$$

دستگاههای زیر را با استفاده از دستورهای کرامر حل کنید:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad -14$$

$$\begin{cases} x - 2y = -11 \\ 3x + 7y = 19 \end{cases} \quad -15$$

$$\begin{cases} 1/5x + 2/4y = 15 \\ 0/5x - 0/2y = -0/04 \end{cases} \quad -16$$

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3 \\ \frac{12x-7y}{13} = 3 \end{cases} \quad -17$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y+1} = \frac{1}{5} \end{cases} \quad -18$$

$$\begin{cases} x + 3y = 7a \\ 2x + y = 7a \end{cases} \quad -۳۴$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6a + 4b \\ 5x - y = 10a - 2b \end{cases} \quad -۳۵$$

$$\begin{cases} x + y = a + b \\ 5x - y = 10a - 2b \end{cases} \quad -۳۶$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3a + 1 \\ 6x - 5y = a + 6 \end{cases} \quad -۳۷$$

دستگاههای زیر را حل و بحث کنید:

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ bx + y = ab + 1 \end{cases} \quad -۳۸$$

$$\begin{cases} ax + by = 2ab \\ y - x = a \end{cases} \quad -۳۹$$

$$\begin{cases} 2ax + 3by = 2ab \\ 5ax + 4by = 2ab \end{cases} \quad -۴۰$$

$$\begin{cases} bx + ay = a + b \\ ab(x - y) = a^2 - b^2 \end{cases} \quad -۴۱$$

$$\begin{cases} ax + by = 2 \\ 3ax - 2by = 2 \end{cases} \quad -۴۲$$

$$\begin{cases} px + qy = p^2 - 4q^2 \\ y - 2x \end{cases} \quad -۴۳$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9 \\ \frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5 \end{cases} \quad -۳۶ \quad \begin{cases} 2x + \frac{y-2}{5} = 21 \\ 4y + \frac{x-4}{6} = 29 \end{cases} \quad -۳۵$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \\ \frac{x+y}{4} - \frac{y-x}{2} = 10 \end{cases} \quad -۳۷$$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{5} + \frac{y-x}{4} = 2x - 8 \\ 2y - 3x = 2y + 4 \end{cases} \quad -۳۸$$

$$\begin{cases} \frac{13}{x+2y+3} = \frac{-3}{2x+5y+6} \\ \frac{3}{6x+5y+4} = \frac{19}{2x+2y+1} \end{cases} \quad -۳۹$$

$$\begin{cases} \frac{5x+7y}{3x+11} = \frac{13}{7} \\ \frac{11x+2y}{7x+5y} = \frac{19}{11} \end{cases} \quad -۴۰$$

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{5} + \frac{3x+2y}{11} = 2 \\ \frac{-2x}{3} + \frac{4x+y-1}{4} = 1 \end{cases} \quad -۴۱$$

$$\begin{cases} \frac{4x+5y}{4} - \frac{x-y}{4} = 1 \\ \frac{3x-y}{3} + 2y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad -۴۲$$

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y = 3a \\ 3x + 5y = 13a \end{cases} \quad -۴۳$$

$$\begin{cases} (a-1)x + (r b - 2)y = 5 \\ r(x+y) = 1 \end{cases} \quad -۵۹$$

$$\begin{cases} (a-2b)x + (ra-b)y = 7 \\ (ra+1)x - (rb-5)y = -3 \end{cases} \quad -۶۰$$

$$\begin{cases} x - (ra+rb-1)y = 9a-b \\ rx + (a-rb+5)y = 38 \end{cases} \quad -۶۱$$

دستگاههای زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x + y = \frac{ra+b}{a+b} - a - b \\ y = \frac{ab}{a+b} + a - b \\ y - x = 2a \end{cases} \quad -۶۲$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{a+b}{a+b} - 1 \\ \frac{a+b}{a+b} - 1 = ab \\ x + y = 2a \end{cases} \quad -۶۳$$

$$\begin{cases} r + \frac{x-y}{a-b} = r \\ \frac{x-y}{a-b} = r \\ bx - ay = 0 \end{cases} \quad -۶۴$$



حل مسائل

## فصل هشتم

### حل مسائل فکری

۱- یکی از موارد استعمال جبر ، حل مسائل فکری به کمک آن است . چند مثال زیر این مطلب را بخوبی روشن می کند :

مثال ۱- مطلوب است تعیین عددی که مجموع نصف و ثلث و ربع آن ۱۳ باشد .

حل - چنانچه عددی را که مجهول مسئله است برابر  $x$  فرض کنیم ، نصف و ثلث و ربع آن به ترتیب  $\frac{x}{2}$  ،  $\frac{x}{3}$  و  $\frac{x}{4}$  می باشند . و چون این عدد باید چنان باشد که مجموع نصف و ثلث و ربع آن برابر ۱۳ گردد ، می توانیم بنویسیم :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13$$

همانطور که می دانید این تساوی معادله ای است که از حل آن می توانیم  $x$  را بدست آوریم :

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - 13 = 0$$

$$\frac{6x + 4x + 3x - 156}{12} = 0$$

-۷۶-

$$۱۳x - ۱۵۶ = ۰ \quad \text{یا}$$

$$x = ۱۲ \quad \text{و از آنجا}$$

بنابراین عدد مطلوب ۱۲ است.

**مثال ۲-** سن پدری ۴۳ سال و سن پسرش ۷ سال است. معین کنید پس از چند سال سن پدر ۴ برابر سن پسر می‌شود.

**حل-** فرض می‌کنیم پس از  $x$  سال سن پدر ۴ برابر سن پسر شود. در آن موقع سن پدر  $(۴۳+x)$  سال و سن پسر  $(۷+x)$  سال خواهد بود. اما صورت مسئله می‌گوید که در آن موقع باید سن پدر (یعنی  $۴۳+x$ ) چهار برابر سن پسر (یعنی  $۷+x$ ) باشد، پس می‌نویسیم:

$$۴۳+x = ۴(۷+x)$$

این معادله را حل می‌کنیم و از آنجا مقدار  $x$  را بدست می‌آوریم:

$$۴۳+x = ۲۸+۴x$$

$$x = ۵ \text{ سال}$$

**مثال ۳-** مجموع دو عدد ۱۵۵ و تفاضل آنها ۸۵ است. آن

دو عدد کدامند؟

**حل-** چنانچه عدد بزرگتر را برابر  $x$  و عدد کوچکتر را برابر  $y$

فرض کنیم باید:  $x+y = ۱۵۵$  و  $x-y = ۸۵$  باشد. این دو معادله

$$\begin{cases} x+y=155 \\ x-y=85 \end{cases}$$

بدست می‌آید که از حل آن اعداد مطلوب،  $x = ۱۲۰$  و  $y = ۳۵$ ،

تعیین می‌گردند.

-۷۷-

**تبصره -** مثال ۳ را به طریق زیر نیز می‌توان حل کرد:

چنانچه عدد کوچکتر را  $x$  فرض کنیم، عدد بزرگتر  $x+۸۵$  خواهد بود و چون مجموع آنها برابر ۱۵۵ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$x+x+۸۵=۱۵۵$$

از حل این معادله  $x$  یعنی عدد کوچکتر بدست می‌آید:  $x = ۳۵$ ، و بنابراین عدد بزرگتر برابر  $۳۵+۸۵ = ۱۲۰$  می‌باشد.

**مثال ۴-** عددی را بر اعداد ۵ و ۶ تقسیم کرده‌اند، باقیمانده‌ها به ترتیب برابر ۴ و ۲ و مجموع خارج قسمت‌ها برابر ۱۶ شده است. آن عدد را تعیین کنید.

**حل-** عدد مطلوب را برابر  $x$  فرض می‌کنیم.

چون باقیمانده تقسیم  $x$  بر ۵ برابر عدد ۲ است، پس خارج قسمت این تقسیم  $\frac{x-۲}{۵}$  خواهد بود. به همین طریق خارج قسمت تقسیم  $x$  بر ۶ و بر ۱۱ به ترتیب  $\frac{x-۱}{۶}$  و  $\frac{x-۴}{۱۱}$  است. آنطور که از صورت مسئله پیداست، باید مجموع خارج قسمت‌ها مساوی ۱۶ باشد، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{x-۲}{۵} + \frac{x-۱}{۶} + \frac{x-۴}{۱۱} = ۱۶$$

از حل این معادله، عدد مطلوب، یعنی  $x$ ، بدست می‌آید:

$$x = ۳۷$$

**مثال ۵-** موجودی دو نفر به ترتیب ۷۶۹۰ ریال و ۳۲۳۰ ریال

است. اولی هر ماه ۱۰۰ ریال از پول خود برمی‌دارد و دومی هر ماه

۱۰۰ ریال به پول خود می‌افزاید. معلوم کنید پس از چندماه پول اولی

-۷۸-

۳ برابر پول دومی خواهد شد .

**حل -** فرض می کنیم پس از  $x$  ماه پول اولی ۳ برابر پول دومی گردد . چون اولی هر ماه  $۱۰۰x$  ریال از پول خود برمی دارد ، پس در  $x$  ماه  $۱۰۰x$  ریال از پول خود برداشته و موجودی او برابر  $(۷۶۹۰ - ۱۰۰x)$  ریال خواهد شد . به همین طریق معلوم می شود که موجودی دومی پس از  $x$  ماه برابر  $(۳۲۳۰ + ۱۰۰x)$  ریال است . چون پس از این مدت ، موجودی اولی ۳ برابر موجودی دومی می گردد ، می توانیم بنویسیم :

$$۷۶۹۰ - ۱۰۰x = ۳(۳۲۳۰ + ۱۰۰x)$$

باید این معادله را حل کنیم تا جواب مسئله بدست آید . اما از حل این معادله نتیجه می شود :

$$x = -۵$$

چون نمی توانیم بگوییم که پس از  $-۵$  ماه پول اولی ۳ برابر پول دومی خواهد شد ، این مسئله جواب ندارد . یعنی هرگز در آتیه با شرایط صورت مسئله پول اولی ۳ برابر پول دومی نخواهد شد . اما جواب بدست آمده را می توان بنحوی تعبیر کرد و گفت که ۵ ماه پیش (یعنی  $-۵$ ) پول اولی ۳ برابر پول دومی بوده است (امتحان کنید!).

**مثال ۶-** کتاب فروشی يك بار ۱۳ جلد کتاب جبر و ۷ جلد کتاب حساب فروخت به  $۵۳۵$  ریال . بار دیگر ۹ جلد کتاب جبر و ۱۴ جلد کتاب حساب فروخت به  $۶۴۵$  ریال . تعیین کنید قیمت يك جلد کتاب

-۷۹-

جبر و يك جلد کتاب حساب چقدر است ؟

**حل -** قیمت يك جلد کتاب جبر را  $x$  ریال و قیمت يك جلد کتاب حساب را  $y$  ریال فرض می کنیم .

برای فروش بار اول می توان نوشت :  $۱۳x + ۷y = ۵۳۵$

و برای فروش بار دوم می توانیم بنویسیم :  $۹x + ۱۴y = ۶۴۵$

این دو معادله را که با هم در نظر بگیریم دستگاه :

$$\begin{cases} ۱۳x + ۷y = ۵۳۵ \\ ۹x + ۱۴y = ۶۴۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱۳x + ۷y = ۵۳۵ \\ ۹x + ۱۴y = ۶۴۵ \end{cases}$$

حاصل می شود که از حل آن بدست می آید :

$$x = ۲۵ \quad y = ۳۰$$

**مثال ۷-** عددی تعیین کنید که مجموع نصف و ربع آن ۸ واحد

بیش از  $\frac{۳}{۴}$  آن باشد .

**حل -** عدد مطلوب را برابر  $x$  فرض می کنیم ، بنابراین داریم :

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴} = \frac{۳}{۴}x + ۸$$

که برای حل این معادله چنین داریم :

$$\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴} - \frac{۳x}{۴} - ۸ = ۰$$

$$\frac{۲x + x - ۳x - ۳۲}{۴} = ۰$$

یا

که می توان نوشت :

$$(۳ - ۳)x = ۳۲$$

چون این معادله نشدنی است ، مسئله جواب ندارد . یعنی هیچ

-۸۰-

عددی نیست که مجموع نصف و ربع آن ۸ واحد بیش از  $\frac{3}{4}$  آن باشد.

**مثال ۸-** عددی را تعیین کنید که مجموع  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{12}$  آن برابر ثلث آن عدد گردد.

**حل -** عدد مطلوب را برابر  $x$  فرض می کنیم، بنابراین داریم:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{12} = \frac{x}{3}$$

که اگر این معادله را حل کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{12} - \frac{x}{3} = 0$$

$$\frac{3x + x - 4x}{12} = 0$$

$$4x - 4x = 0$$

$$(4 - 4)x = 0$$

یا

چون این معادله مبهم است، مسئله جوابهای بیشمار دارد.

یعنی مجموع  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{12}$  هر عددی برابر ثلث آن عدد است.

**۲-** از مثالهای فوق بخوبی متوجه می شوید که برای حل مسائل فکری از راه جبر باید نکات زیر را در نظر داشت:

**الف - مجهول، یا مجهولهای مسئله را تشخیص داده و آنها را با حروف نمایش داد. معمولاً حروف آخر الفبای لاتین را به این منظور انتخاب می کنند.**

**ب -** با استفاده از مفروضات مسئله، بین معلومات آن و مجهولات مزبور رابطه یا روابطی برقرار کرد. با اصطلاح معادله یا معادلات

-۸۱-

مسئله را تشکیل داد.

**ج -** معادله یا معادلات مسئله را حل و بحث کرد و جوابهای را که با شرایط مسئله وفق می دهد بدست آورد.

### تمرین

**۱ -** دو نفر روی هم ۱۸۷۵۰ ریال دارند. در صورتی که پول اولی ۴ برابر پول دومی باشد مقدار پول هر یک را تعیین کنید.

**۲ -** مبلغ ۵۵۰ ریال را بین سه نفر بطوری تقسیم کنید که اولی ۵۰ ریال بیش از دومی و دومی ۱۰۰ ریال بیش از سومی سهم ببرد.

**۳ -** مبلغ ۶۵۱۲ ریال را بین سه نفر طوری تقسیم کنید که سهم دومی  $\frac{3}{4}$  سهم اولی و سهم سومی  $\frac{3}{4}$  سهم دومی باشد.

**۴ -** سه عدد زوج متوالی تعیین کنید که مجموع آنها ۵۴ باشد.

**۵ -** عددی تعیین کنید که مجموع  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{2}{7}$  و  $\frac{1}{8}$  آن برابر ۲۸۳ باشد.

**۶ -** پدری ۲۷ سال و پسرش ۳ سال دارد. چند سال دیگر سن پسر  $\frac{1}{4}$  سن پدر خواهد شد؟

**۷ -** به صورت و مخرج کسر  $\frac{13}{17}$  چه عددی را باید افزود تا کسر حاصل

برابر  $\frac{19}{11}$  شود؟

**۸ -** پول دو نفر روی هم ۱۰۵۰۰ ریال است. اولی  $\frac{1}{3}$  پول خود و

دومی  $\frac{1}{6}$  پول خود را خرج کردند و باقیمانده پول اولی دو برابر باقیمانده پول دومی شد. پول هر یک چقدر بوده است؟

۹- شکوفه ۲۴۸۲ ریال و شیده ۴۰۸ ریال در صندوق پس انداز خود دارند و هریک در هر ماه ۳۲۵ ریال پس انداز می کنند . معین کنید پس از چند ماه پول شکوفه ۴ برابر پول شیده می شود .

۱۰- مبلغی را بین مدهای می خواستند تقسیم کنند . به هریک ۷ ریال می رسید . در موقع تقسیم ۲ نفر بر این عده افزوده شد ، در نتیجه به هر یک ۵ ریال رسید . مبلغ و تعداد را تعیین کنید .

۱۱- دهقانی یک رأس اسب و یک رأس گاو و یک رأس گوسفند را به مبلغ ۸۰۰۰ ریال خرید . قیمت گاو ۱۰۰۰ ریال کمتر از قیمت اسب و ۲۴۰ ریال بیشتر از قیمت گوسفند بود . قیمت هر رأس چقدر است ؟

۱۲- ساعت فروشی ۱۸ ساعت مردانه و ۱۳ ساعت زنانه را به مبلغ ۲۶۶۰۰ ریال خرید . قیمت هر ساعت زنانه ۴ برابر قیمت هر ساعت مردانه بود . قیمت هریک از این دو جنس چقدر است ؟

۱۳- تاجری یک توپ پارچه را متری ۲۰۰ ریال خرید . نصف آن را متری ۲۴۰ و  $\frac{1}{6}$  آن را متری ۲۷۰ و  $\frac{1}{12}$  آن را متری ۳۰۰ ریال و بقیه را متری ۲۰۰ ریال فروخت و جمعاً ۲۲۰۰ ریال سود برد . طول پارچه چقدر است ؟

۱۴- دو نفر روی هم ۳۵۰۰۰ ریال پول داشتند . پس از آنکه اولی  $\frac{5}{6}$  و دومی  $\frac{7}{8}$  پول خود را خرج کردند پول هر دو مساوی شد . هر یک چه مبلغ داشتند ؟

۱۵- کشاورزی حساب کرده اگر گندم خود را خرواری ۱۶۴۵ ریال بفروشد ، قطعه زمینی را که در نظر دارد خریده و ۵۲۷۰ ریال برایش باقی خواهد ماند . اتفاقاً گندم را پیش از خرواری ۱۵۱۵ ریال نخریدند و در نتیجه بعد از خرید زمین ۴۵۲۰ ریال مفروض شد . تعیین کنید مقدار گندم و قیمت زمین را .

۱۶- به ۱۸۰ لیتر سرکه لیتری  $\frac{4}{5}$  ریال چند لیتر سرکه لیتری ۶ ریال اضافه کنیم تا سرکه ممزوج لیتری ۵ ریال شود ؟

۱۷- شخصی به مقداری سرکه لیتری ۱۵ ریال آفتد آب ممزوج کرد که ۲۵ لیتر ممزوج  $\frac{337}{5}$  ریال قیمت پیدا کرد . معلوم کنید مقدار آب ممزوج در یک لیتر را .

۱۸- ۴۰ کیلوگرم آب دریا  $\frac{3}{4}$  کیلوگرم نمک دارد . چه مقدار آب خالص بر آن بیفزاییم که ۴۰ کیلوگرم ممزوج بیش از ۲ کیلوگرم نمک نداشته باشد ؟

۱۹- عددی ۲ رقمی چنان تعیین کنید که مجموع ارقامش برابر ۱۳ بوده و مجموع  $\frac{1}{3}$  رقم یکان و  $\frac{1}{5}$  رقم دهگان آن برابر ۳ شود .

۲۰- هوشنگ با پدرش قرار گذاشت که هر روز نمره خوب گرفت ۵۰ ریال از پدرش بگیرد و هر روز نمره بد گرفت ۵ ریال به پدرش بدهد . پس از ۲۰ روز ۲۸۵ ریال پول داشت . معین کنید چند روز نمره خوب و چند روز نمره بد گرفته است ؟

۲۱- شخصی خانه ای را به ۴۰۰ متر مربع است باباغی که ۱۲۰۰ متر مربع است به مبلغ ۱۰۴۰۰۰۰ ریال خرید . اگر خانه ۵۰ متر مربع کمتر و باغ ۲۰۰ متر مربع بیشتر بود ، ۵۰۰۰۰ ریال کمتر می پرداخت . تعیین کنید قیمت یک متر مربع از خانه و باغ را .

۲۲- کسری بیابیده چون بر صورت و مخرج آن ۳ واحد بیفزایند معادل  $\frac{4}{5}$  شود ، و چون از صورت و مخرج آن ۳ واحد کم کنند معادل  $\frac{1}{2}$  شود . ۲۳- مطلوب است تعیین ۲ عدد که تفاضل آنها ۱۹۹ بوده و چون برهم تقسیم کنیم خارج قسمت ۴ و باقیمانده ۱۰ شود .

۲۴- دو اتوموبیل به فاصله ۶۰۰ کیلومتر از یکدیگر ، در یک لحظه به طرف هم حرکت کردند . اولی ساعتی ۵۰ کیلومتر و دومی ساعتی ۵۵ کیلومتر راه را طی می کند . تعیین کنید که وقتی که به هم رسیدند هر یک چقدر راه پیموده اند ؟

۲۵- ۱۴۰۰ نفر سرباز که مأمور جبهه بودند ، آذوقه ۵۰ روز خود را موجود داشتند . بعد از ۲۰ روز عده‌ای به آنها ملحق گشتند و باقیمانده آذوقه آنها پس از ۱۰ روز دیگر تمام شد . دسته‌های چند نفر بوده‌اند ؟  
۲۶- مجموع ارقام يك عدد دورقمی ، ۱۱ است . چنانچه جای رقمهای آنرا تغییر عددی بدست می‌آید که از عدد اولی ۴۵ واحد بیشتر است . آن عدد را معلوم کنید .

۲۷- بنایی باشا در دش روی هم رفته روزی ۲۰۰۰ ریال مزد می‌گیرد . پس از مدتی که با هم کاری را انجام دادند ، بنا ۱۲۰۰ ریال مزد گرفت و شاگرد او ۴۸۰ ریال . تعیین کنید او را چند روز کار کرده‌اند . ثانیاً مزد روزانه هر يك چقدر است ؟

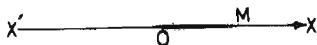
۲۸- مالکی ۱۶۰ گاو و گوسفند فروخت به مبلغ ۱۲۷۶۰۰ ریال . در صورتی که قیمت ۲۰ گوسفند برابر قیمت ۳ گاو و عده گوسفندها ۳ برابر عده گاوها باشد ، قیمت يك گاو و يك گوسفند را تعیین کنید .

۲۹- از بقالی مقداری روغن به مبلغ ۴۰۰ ریال و مقداری برنج که وزن آن ۶ کیلو از روغن بیشتر است به مبلغ ۲۲۰ ریال خریده‌ایم . در صورتی که بهای يك کیلو روغن ۴ برابر بهای يك کیلو برنج باشد ، تعیین کنید چه مقدار روغن و چه مقدار برنج خریده‌ایم .

## فصل نهم

### مفاهيمات نقطه و نمودارها

۱- محور - بر روی امتداد  $x'x$  نقطه  $o$  به نام مبدأ گرفته شده است . برای حرکت بر روی این امتداد از مبدأ  $o$  دو راه موجود است ، یکی از  $o$  به طرف  $x$  و دیگری از  $o$  به طرف  $x'$  که بترتیب یکی را حرکت در جهت مثبت و دیگری را حرکت در جهت منفی اختیار می‌کنند . (جهت مثبت از چپ به راست و با این علامت — نمایش داده می‌شود) (شکل ۱) .



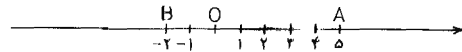
(ش ۱)

خط جهت‌دار  $ox$  را محور می‌گویند . بر روی هر محور ، واحدی برای اندازه گیری انتخاب می‌شود .

۲- طول نقطه واقع بر محور - طول هر نقطه مانند  $M$  واقع بر محور (شکل ۱) عددی است جبری که قدر مطلق آن اندازه پاره خط  $OM$  (بر حسب واحد) و علامتش (+) است اگر نقطه روی

نیم خط  $ox$  باشد و  $(-)$  است هر گاه روی نیم خط  $ox'$  انتخاب شود. طول نقطه  $M$  را با  $\overline{OM}$  (بخوانید اندازه جبری  $OM$ ) نشان می دهند.

در شکل زیر دو نقطه  $A$  و  $B$  بترتیب دارای طولهای  $+۵$  و  $-۲$  می باشند. یعنی  $\overline{OA} = +۵$  و  $\overline{OB} = -۲$ .



(ش ۲)

۳- مختصات نقطه - دو محور  $oy$  و  $ox'$  را عمود برهم اختیار می کنند (شکل ۳). اگر از نقطه  $M$  دو عمود  $MP$  و  $MQ$  را بر این دو محور فرود آورند، بنا به تعریف،  $\overline{OP}$  را طول نقطه  $M$  یا آبسیس (Abscisse) نقطه  $M$  و  $\overline{OQ}$  را عرض نقطه  $M$  یا (Ordonnée) نقطه  $M$  می نامند و طول و عرض نقطه  $M$  را مختصات آن می گویند.

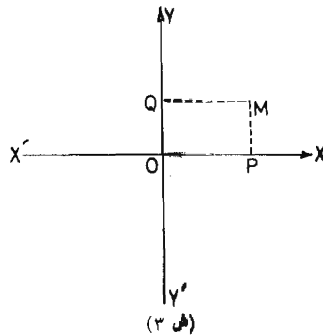
دو محور عمود برهم، دستگاه مختصات نام دارد. محور  $ox'$  را محور طولها و محور  $oy$  را محور عرضها می گویند. و  $O$  مبدأ مختصات نام دارد.

اگر طول نقطه  $M$  برابر  $p$  و عرض آن برابر  $q$  باشد، می نویسند

$$M(p, q) \text{ یا } M \begin{vmatrix} p \\ q \end{vmatrix} \text{ می خوانند } M \text{ به مختصات } p \text{ و } q.$$

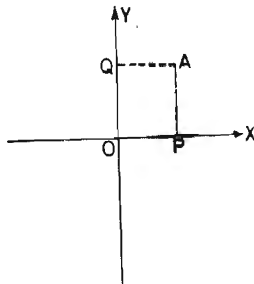
۴- بعکس اگر مختصات نقطه ای معلوم باشد می توان جای نقطه را در صفحه دو محور تعیین نمود. مثلاً اگر داشته باشیم:

-۸۷-



(ش ۳)

۴/۳ یعنی طول و عرض نقطه  $A$  بترتیب  $+۳$  و  $+۴$  باشد، برای پیدا کردن محل نقطه  $A$ ، ابتدا طولهای  $+۳$  و  $+۴$  را بترتیب بر محورهای طول و عرض جدا می کنیم تا نقاط  $P$  و  $Q$  مشخص شوند (شکل ۴) و بعد از این نقاط دو عمود بر محورها اخراج می کنیم، محل تلاقی این دو عمود نقطه  $A$  خواهد بود.



(ش ۴)

## نمودار

هـ فرض می‌کنیم درجه حرارت هوا در تهران از ساعت ۷ صبح تا ساعت ۶ عصر یکی از روزهای آذرماه به قرار زیر باشد :

ساعت	درجه حرارت	ساعت	درجه حرارت
۷ صبح	$-5^{\circ}$	۱۳	$+6^{\circ}$
۸	$-3^{\circ}$	۱۴	$+8^{\circ}$
۹	$-2^{\circ}$	۱۵	$+7^{\circ}$
۱۰	$-1^{\circ}$	۱۶	$+5^{\circ}$
۱۱	$+1^{\circ}$	۱۷	$+3^{\circ}$
۱۲	$+2^{\circ}$	۱۸	$+1^{\circ}$

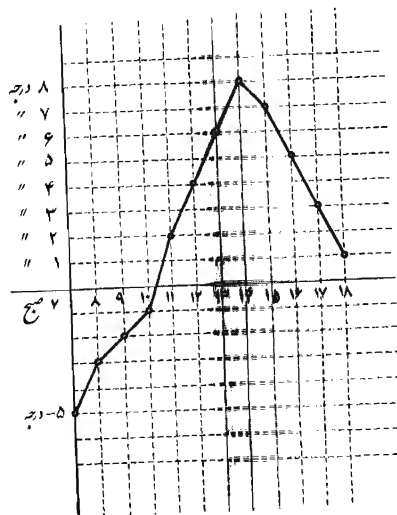
برای اینکه تغییرات درجه حرارت در ساعات مختلف بهتر نمایش داده شود آن را به طریق زیر در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم :

۱- پاره خطی به طول  $a$  برای واحد زمان ، یعنی ساعت ، اختیار کرده وساعتهای مختلف را روی محور طولها به وسیله نقاطی نمایش می‌دهیم .

۲- پاره خطی به طول  $b$  برای واحد درجه حرارت ، اختیار کرده و درجات مختلف را روی محور عرضها به وسیله نقاطی نمایش می‌دهیم (  $a$  و  $b$  مقادیر دلخواهند ) .

۳- هر دو مقدار از ساعت و درجه حرارت که نظیر یکدیگرند نقطه‌ای را در دستگاه مشخص می‌کنند. حال اگر این نقاط را تعیین

کرده متوالیاً به هم وصل کنیم ، یک خط شکسته بدست می‌آید که آن را نمودار درجه حرارت در مدت مزبور می‌نامند (شکل ۵) .



(ش ۵)



$$(y^2 - 2y)^2 + (y^2 - 2y) - 12 = 0 \quad -2$$

$$(x^2 + 3 - 5x)^2 + 4(x^2 + 3 - 5x) + 3 = 0 \quad -3$$

$$(x+1)^2(x^2+2x-12)+28=0 \quad -4$$

$$12 - x(x+2) = \left(\frac{6}{x+1}\right)^2 \quad -5$$

$$(y^2 + 4y) + \frac{9}{(y+2)^2} = 6 \quad -6$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \quad -7$$

$$(\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \quad -8$$

$$x^2 - x - 18 + \frac{y^2}{x^2 - x} = 0 \quad -9$$

$$(y+1)^2(y-4)(y+6) + 122 = 0 \quad -10$$

$$(2x^2 - 2x)^2 - (32x^2 - 22x) + 28 = 0 \quad -11$$

$$(z^2 - 2z)^2 - 12(z^2 - 2z + 1) - 1 = 0 \quad -12$$

کسرهای زیر را خلاصه کرده و به ساده ترین صورت ممکن بنویسید :

$$\frac{x + \frac{1}{x} - \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} \quad -1$$

$$\frac{a-b + \frac{b-c}{1+ab} + \frac{1}{1+bc}}{1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}} \quad -2$$

## تمرینات مختلف

عبارات زیر را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنید :

$$a^2x^2 + ax^2 - bx - b^2 \quad -1$$

$$(ax - mby)^2 - m(ay - bx)^2 \quad -2$$

$$ab(x^2 - y^2) - xy(a^2 - b^2) \quad -3$$

$$(1+y)^2 - 2x^2(1+y^2) + x^2(1-y)^2 \quad -4$$

$$a^2 - b^2 - ac^2 - 2ac + bc \quad -5$$

$$z^2 - z(a+b+2ba) + ab(ab+a+b+1) \quad -6$$

$$x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 2xyz \quad -7$$

$$bc(b-c) + ac(c-a) + ab(a-b) \quad -8$$

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \quad -9$$

$$b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 + 2abc \quad -10$$

$$a^{2x} + 2a^{2x} + 2a^{2x} + 2a^{2x} + a^x \quad -11$$

$$x^2 + 2ax - b^2 - 2ab \quad -12$$

$$x^2 - 2ax + 1 - a^2 + x^2 \quad -13$$

$$\frac{x^2}{y^2} - 2xy - x^2 + 2y^2 \quad -14$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 \quad -15$$

$$1 - 2ax - (c-a^2)x^2 + acx^2 \quad -16$$

$$(a^2 + b^2)^2 - 9 - (a+b)^2(a-b)^2 \quad -17$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 - (a^2 - b^2)^2 - 1 \quad -18$$

معادلات زیر را به کمک تجزیه به حاصل ضرب عوامل حل کنید:

$$(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0 \quad -1$$

$$\frac{1}{z^2 + \sqrt{z} + 1} + \frac{2}{z + \sqrt{z} + z^2} - \frac{5}{\sqrt{z} + \sqrt{z}^2} \quad -۹$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x^2 + x + 1} = \frac{x + 2}{x^2 - 1} \quad -۱۰$$

معادلات حرفی زیر را حل و بحث کنید:

$$\frac{x + a - b}{x + a} - \frac{x - a + b}{x - a} = \frac{2ab(x - b)}{bx^2 - a^2b} \quad -۱$$

$$\frac{x - 6}{12m + 15} - \frac{x + 2}{4m - 10} = \frac{5(m + 7)x - 7m}{150 - 16m^2} \quad -۲$$

$$\frac{x - a}{x - a - 1} - \frac{x - a - 1}{x - a - 2} = \frac{x - b}{x - b - 1} - \frac{x - b - 1}{x - b - 2} \quad -۳$$

$$[(a^2 - b^2)x - 1]^2 + (2abx - 1)^2 - [(a^2 + b^2)x + 1]^2 \quad -۴$$

$$\frac{1}{x(x - a)} - \left(\frac{x + a}{x}\right)^2 = \frac{2a}{x} \left(x - \frac{a}{x}\right) \quad -۵$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a(x - b^2) + b(a^2 - x)}{a(x - b^2) - b(a^2 - x)} \quad -۶$$

$$\frac{x^{m+1} - ax^{m-1}}{bx} - \frac{ax^{m-1} - x^m}{b} = \frac{yx^m}{b} - ax^{m-2} \quad -۷$$

$$\frac{m^2 + mx + x^2}{m^2 + m^2x + mx^2 + x^2} - \frac{m^2 - m^2x + mx^2}{m^2 + m^2x^2 + x^2} = \frac{1}{m + x} \quad -۸$$

$$\frac{rab + 1}{a}x = \frac{rab}{a + 1} + \frac{ra + 1}{a(a + 1)^2}x + \frac{a^2}{(a + 1)^2} \quad -۹$$

$$\frac{a - x}{a + x} + \frac{b - x}{b + x} - \frac{a + x}{a - x} - \frac{b + x}{b - x} = 0 \quad -۱۰$$

چند مسئله از نسبت و تناسب:

$$y = \frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 + 2a + 1} \text{ و } x = \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a - 2} \text{ اگر } y \text{ باشد ، مطلوب است } -۱$$

$$\frac{(z + 1)\left(\frac{z + 1}{z - 1} - \frac{z - 1}{z + 1}\right)}{1 + \frac{z + 1}{z - 1}} \quad -۳$$

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b + c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}} = \frac{1}{1 + \frac{b^2 + c^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2c^2}} \quad -۴$$

معادلات کسری زیر را حل کنید:

$$\frac{2x - 1}{10 + 2x} + \frac{2x - 1}{15 - 2x} = \frac{6x}{25 - x^2} \quad -۱$$

$$\frac{1}{2x - 1} + \frac{2(x + 1)}{x - 1} - \frac{3x^2 + 1}{2x^2 - 2x + 1} = 1 \quad -۲$$

$$\frac{x - 2x}{2} - \frac{2}{6x - 2} = \frac{1/5x}{x - 5/5} - \frac{2x^2}{2(2x - 1)} \quad -۳$$

$$\frac{2x + 2}{1 + 2x} - \frac{2x + 5}{7 + 2x} + \frac{2x^2 - 2}{7 + 16x + 2x^2} = 1 \quad -۴$$

$$\frac{x + 2}{x + 5} - \frac{x + 2}{x + 6} - \frac{x + 5}{x + 8} + \frac{x + 6}{x + 1} = 0 \quad -۵$$

$$\frac{2z^2 + 2z + 1}{z^2 + 2z + 2} + \frac{2z^2 + 2z + 3}{z^2 + 2z + 3} - \frac{2z^2 + 2}{z^2 + 5z + 6} = 2 \quad -۶$$

$$\frac{y}{z^2 - 1} + \frac{2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{3z - 1z}{z^2 - z^2 - z + 1} \quad -۷$$

$$y\left(x - \frac{x^2 + 5}{x - 2}\right) = 2\left(2x - \frac{1 - 2x^2}{2 - x}\right) \quad -۸$$

تعیین حاصل عبارت  $1 + (a+1)^2 z^2$  در صورتی که  $z$  واسطه هندسی بین  $x$  و  $y$  باشد.

۲- از تناسب  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$  رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cz)^2$$

۳- ازدو رابطه  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$  و  $ad - bc = 0$  رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2 + d^2} = \frac{b^2}{d^2 + c^2} - \frac{y^2}{d^2}$$

۴- اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  باشد، صحت تساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\frac{pa + qb}{pc + qd} = \sqrt{\frac{ab}{cd}} \text{ و } \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}} = \sqrt{\frac{ac}{bd}}$$

۵- از دو رابطه  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  و  $\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z}$  رابطه زیر را نتیجه بگیرید:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

۶- اگر  $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d}$  باشد، ثابت کنید:

$$\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{(A+B+C+D)(a+b+c+d)}$$

دستگاههای دو معادله دومجهولی زیر را حل و در صورت لزوم بحث کنید:

$$\begin{cases} 7(4x + 6y + 1) - \frac{5}{2x - 3y} = 4/5 \\ 5(6x + 9y + 1) - \frac{7}{2x - 3y} = 1/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + \frac{6}{2x - 3y + 5} = 2 \\ 3(2x + y - 1) + \frac{2}{2y - 3x - 5} = \frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{m}{m-1} + \sqrt{r}}{\frac{m}{m+1} - \sqrt{r}} \text{ و } \begin{cases} y = \frac{\frac{2a}{n-1} - 1}{\frac{2a}{n+1} - 1} \\ x - y = 2a \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)x + 2my + 2 = 0 \\ 2mx + (m-1)y - (m-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2m-3)x - my - (3m-4) = 0 \\ -5x + (2m+3)y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)x + (3m-2)y = 2 \\ (2m-1)x - 2y = m+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = y + a \\ \frac{x}{b} = y + b \end{cases}$$

۸-  $m$  و  $n$  را بطرقی تعیین کنید که جوابهای دستگاه زیر  $x = 3$  و  $y = -3$  باشد:

$$\begin{cases} (3m+2n)x - (m-1)y = 4m - 3n - 1 \\ (2m+n-1)x + (m+n-1)y = 2m - n + 2 \end{cases}$$

۹- مطلوب است تعیین  $m$  بقسمی که  $x + y = 3$  باشد:

$$\begin{cases} (5m+1)x + (3m+2)y = 15 \\ (13m-14)x - (2m-5)y = 9 \end{cases}$$

۱۰- اولاً تحقیق کنید اگر  $h - a = 1$  باشد دستگاه زیر نشدنی است.

ثانیاً  $a$  و  $b$  را تعیین کنید که دستگاه سهم باشد.  
ثالثاً از طریق حذف قیاسی دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} (a+1)x + \frac{y}{a} = 5 \\ (b-1)x + \frac{y}{b} = 3 \end{cases}$$

۱۱- اولاً  $t$  را بقسمی تعیین کنید که دستگاه زیر نشدنی باشد.

ثانیاً اگر  $t = \frac{1}{6}$  باشد جوابهای  $x$  و  $y$  را بدست آورید.

$$\begin{cases} x = \frac{(2-3t)y+5}{2t-3} \\ y = \frac{(5-2t)x-7}{3t-4} \end{cases}$$

۱۲- اولاً  $m$  را بقسمی تعیین کنید که دستگاه زیر نشدنی باشد.

ثانیاً  $m$  را بقسمی تعیین کنید که  $x$  و  $y$  برابر باشند.

ثالثاً اگر  $m = -2$  باشد از دستور کرامر دستگاه را حل کنید.

$$\begin{cases} (2m-3)x - (2-3m)y - 5 = 0 \\ (5-2m)x - (3m-4)y - 7 = 0 \end{cases}$$

پایان